Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 73 (Übung)

In Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei das uneigentliche Integral

$$I_s := \int_0^\infty \frac{1}{x^s + x^{1/s}} \, \mathrm{d}x$$

gegeben. Bestimmen Sie alle s, für die I_s konvergiert.

Lösungsvorschlag

1. Fall: $s < 0$. Für jedes $x \geq 1$ gilt $x^s \leq x^0 = 1$ und $x^{1/s} \leq x^0 = 1$, so dass $\frac{1}{x^s+x^{1/s}} \geq \frac{1}{2}$ ist. Wegen der Divergenz von $\int_1^\infty \frac{1}{2} \, \mathrm{d}x$ liefert das Minorantenkriterium die Divergenz des uneigentlichen Integrals $\int_1^\infty \frac{1}{x^s+x^{1/s}} \, \mathrm{d}x$. Infolgedessen ist I_s divergent.

2. Fall: $s \in (0,1)$. Wir zeigen, dass sowohl $\int_0^1 \frac{1}{x^s+x^{1/s}} \, \mathrm{d}x$ als auch $\int_1^\infty \frac{1}{x^s+x^{1/s}} \, \mathrm{d}x$ konvergieren. Hieraus folgt dann die Konvergenz von I_s.
Für jedes $x > 0$ gilt $\frac{1}{x^s+x^{1/s}} \leq \frac{1}{x^s}$. Da $\int_0^1 \frac{1}{x^s} \, \mathrm{d}x$ gemäß Beispiel (1) nach Definition 2 in Paragraph 13 konvergiert, ist $\int_0^1 \frac{1}{x^s+x^{1/s}} \, \mathrm{d}x$ nach dem Majorantenkriterium konvergent.
Für jedes $x > 0$ gilt $\frac{1}{x^s+x^{1/s}} \leq \frac{1}{x^{1/s}}$. Da $\int_1^\infty \frac{1}{x^{1/s}} \, \mathrm{d}x$ wegen $1/s > 1$ konvergiert (vgl. Beispiel (1)), ist $\int_1^\infty \frac{1}{x^s+x^{1/s}} \, \mathrm{d}x$ nach dem Majorantenkriterium konvergent.

3. Fall: $s = 1$. $I_1 = \int_0^\infty \frac{1}{2x} \, \mathrm{d}x$ ist divergent (vgl. Beispiel (1)).

4. Fall: $s > 1$. Ist $q := 1/s$ gesetzt, so gilt $q \in (0,1)$. Daher konvergiert laut Fall 2

$$I_q = \int_0^\infty \frac{1}{x^q + x^{1/q}} \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{x^{1/s} + x^s} \, \mathrm{d}x = I_s \, .$$

Fazit: I_s ist genau dann konvergent, wenn $s > 0$ und $s \neq 1$ gilt.

Aufgabe 74 (Tutorium)

Es sei $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ das uneigentliche Integral

$$I_n(\lambda) := \int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x$$

konvergiert, und berechnen Sie $I_n(\lambda)$.

Hinweis: Berechnen Sie $I_0(1)$, finden Sie dann mit partieller Integration eine Rekursionsformel für $I_n(1)$ und folgern Sie schließlich den Wert von $I_n(\lambda)$ aus demjenigen von $I_n(1)$ mit Hilfe einer Substitution.

Lösungsvorschlag

Wir zeigen zunächst, dass das uneigentliche Integral $I_0(1)$ konvergiert und dass sein Wert 1 ist:

$$I_0(1) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_{x=0}^R = \lim_{R\to\infty} -\mathrm{e}^{-R} + \mathrm{e}^{-0} = 1\,.$$

Nun sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Partielle Integration mit $u(x) = x^n$ und $v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ liefert

$$\begin{aligned} I_n(1) &= \lim_{R\to\infty} \int_0^R x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \left(\Big[x^n(-\mathrm{e}^{-x})\Big]_{x=0}^R - \int_0^R n x^{n-1}(-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x \right) \\ &= \lim_{R\to\infty} -R^n \mathrm{e}^{-R} + nI_{n-1}(1) = nI_{n-1}(1)\,. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Aus dieser Rekursionsformel folgt per vollständiger Induktion, dass das Integral $I_n(1)$ konvergiert mit Wert $n!$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:
IA: $n = 0$. Zu Beginn haben wir gesehen, dass $I_0(1)$ konvergiert und dass $I_0(1) = 1 = 0!$ gilt.
IS: Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Das Integral $I_n(1)$ konvergiere und es gelte $I_n(1) = n!$ (IV). Damit ergibt sich

$$I_{n+1}(1) \overset{(*)}{=} (n+1)I_n(1) \overset{\text{(IV)}}{=} (n+1)n! = (n+1)!\,.$$

Für jedes $\lambda > 0$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ führt die Substitution $y = \lambda x, dy = \lambda\,\mathrm{d}x$ auf

$$\begin{aligned} I_n(\lambda) &= \lim_{R\to\infty} \int_0^R x^n \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_0^{\lambda R} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^n \mathrm{e}^{-y}\,\frac{dy}{\lambda} = \lambda^{-(n+1)} \lim_{R\to\infty} \int_0^{\lambda R} y^n \mathrm{e}^{-y}\,dy \\ &= \lambda^{-(n+1)} I_n(1) = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 75 (Übung)

a) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert (wobei in (i) $s < 0$ und $x \in \mathbb{R}$ sei).

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{st}\cos(tx)\,\mathrm{d}t$, (ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t\log(t)}{\sinh(t) - t}\,\mathrm{d}t$.

b) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t} - t^2}\,\mathrm{d}t$, (ii) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\log(1+t)\,\mathrm{d}t$.

c) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{k=3}^\infty \frac{(\log k)^2}{k^{\log\log k}}$ auf Konvergenz mit Hilfe des Integralvergleichskriteriums.

Lösungsvorschlag

a) (i) Sei $b > 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\int_0^b \underbrace{e^{st}}_{u'(t)} \underbrace{\cos(tx)}_{v(t)}\, dt &\overset{\text{Part. Int.}}{=} \frac{1}{s}\left[e^{st}\cos(tx)\right]_{t=0}^{t=b} + \frac{x}{s}\int_0^b \underbrace{e^{st}}_{u'(t)} \underbrace{\sin(tx)}_{v(t)}\, dt \\ &\overset{\text{Part. Int.}}{=} \frac{1}{s}(e^{sb}\cos(bx)-1) + \frac{x}{s^2}\left[e^{st}\sin(xt)\right]_{t=0}^{t=b} - \frac{x^2}{s^2}\int_0^b e^{st}\cos(xt)\, dt \\ &= \frac{1}{s}(e^{sb}\cos(bx)-1) + \frac{x}{s^2}e^{sb}\sin(xb) - \frac{x^2}{s^2}\int_0^b e^{st}\cos(xt)\, dt\end{aligned}$$

Addieren von $\frac{x^2}{s^2}\int_0^b e^{st}\cos(xt)\, dt$ auf beiden Seiten liefert

$$\left(1+\frac{x^2}{s^2}\right)\int_0^b e^{st}\cos(xt)\, dt = \frac{s^2+x^2}{s^2}\int_0^b e^{st}\cos(xt)\, dt = \frac{1}{s}(e^{sb}\cos(bx)-1) + \frac{x}{s^2}e^{sb}\sin(bx)$$

und damit

$$\int_0^b e^{st}\cos(xt)\, dt = -\frac{s}{s^2+x^2} + \frac{s}{s^2+x^2}e^{sb}\cos(bx) + \frac{x}{s^2+x^2}e^{sb}\sin(bx).$$

Wegen

$$|e^{sb}\cos(bx)| \leq e^{sb} \xrightarrow{b\to\infty} 0 \qquad \text{sowie} \qquad |e^{sb}\sin(bx)| \leq e^{sb} \xrightarrow{b\to\infty} 0$$

ist das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{st}\cos(xt)\, dt$ konvergent und es gilt:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{st}\cos(xt)\, dt &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{st}\cos(xt)\, dt \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{s}{s^2+x^2} + \frac{s}{s^2+x^2}e^{sb}\cos(bx) + \frac{x}{s^2+x^2}e^{sb}\sin(bx)\right) \\ &= -\frac{s}{s^2+x^2}\end{aligned}$$

(ii) Wir untersuchen den Integranden in der Nähe der unteren Grenze. Es ist

$$\log(t) \leq \log\left(\frac{1}{e}\right) = -1$$

für alle $0 < t \leq \frac{1}{e}$. Ferner folgt aus der Potenzreihendarstellung des sinh (vgl. Paragraph 9 der Vorlesung)

$$\begin{aligned}0 < \sinh(t) - t &= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)!}t^{2n+1} - t = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n+1)!}t^{2n+1} \\ &\overset{\text{Index-Shift}}{=} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+3)!}t^{2n+3} = t^3 \underbrace{\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+3)!}t^{2n}}_{=:h(t)>0}\end{aligned}$$

für alle $0 < t \leq \frac{1}{\mathrm{e}}$. Die durch den obigen Ausdruck definierte Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist stetig als Potenzreihe mit Konvergenzradius unendlich. Als stetige Funktion nimmt sie auf kompakten Intervallen ihr Maximum an, also existiert ein $M > 0$ mit $0 < h(t) \leq M$ für alle $0 \leq t \leq \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Also ist

$$-\frac{t\log(t)}{\sinh(t)-t} \geq \frac{t\log(\mathrm{e})}{t^3 h(t)} \geq \frac{1}{t^2 M}$$

für alle $0 < t \leq \frac{1}{\mathrm{e}}$. Wegen

$$\int_a^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \frac{1}{t^2 M}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{M}\left[\frac{1}{t}\right]_{t=a}^{t=\frac{1}{\mathrm{e}}} = \frac{1}{M}\left(\frac{1}{a}-\mathrm{e}\right) \xrightarrow{a\to 0+} \infty$$

ist das uneigentliche Integral $\int_0^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \frac{1}{t^2 M}\,\mathrm{d}t$ divergent. Nach dem Minorantenkriterium aus Satz 13.5 der Vorlesung ist dann auch das uneigentliche Integral

$$-\int_0^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \frac{t\log(t)}{\sinh(t)-t}\,\mathrm{d}t$$

divergent. Somit ist das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{t\log(t)}{\sinh(t)-t}\,\mathrm{d}t$$

ebenfalls divergent.

b) (i) Für alle $0 < t \leq 1$ gilt

$$t^2 \leqslant t \leqslant \sqrt{t}.$$

Damit folgt

$$0 < \left|\frac{1}{2\sqrt{t}-t^2}\right| = \frac{1}{\sqrt{t} + \underbrace{(\sqrt{t}-t^2)}_{\geqslant 0}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}$$

für alle $0 < t \leqslant 1$. Sei $0 < a < 1$. Es gilt:

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\left[\sqrt{t}\right]_{t=a}^{t=1} = 2 - 2\sqrt{a} \xrightarrow{a\to 0+} = 2$$

Also ist das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ konvergent. Nach dem Majorantenkriterium aus der Vorlesung ist auch das Integral $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}-t^2}\,\mathrm{d}t$ (absolut) konvergent.

(ii) Sei $b > 0$. Es gilt:

$$\int_0^b \underbrace{\mathrm{e}^{-t}}_{u'(t)} \underbrace{\log(1+t)}_{v(t)}\,\mathrm{d}t \overset{\text{Part. Int.}}{=} -\left[\mathrm{e}^{-t}\log(1+t)\right]_{t=0}^{t=b} + \int_0^b \mathrm{e}^{-t}\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = -\frac{\log(1+b)}{\mathrm{e}^b} + \int_0^b \mathrm{e}^{-t}\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Wegen

$$\lim_{b\to\infty} \frac{\log(1+b)}{\underbrace{\mathrm{e}^b}_{\to\infty}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{b\to\infty} \frac{1}{(1+b)\mathrm{e}^b} = 0$$

ist das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\log(1+t)\,\mathrm{d}t$ genau dann konvergent, wenn das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$ konvergent ist. Dieses ist tatsächlich der Fall nach dem Majorantenkriterium aus Satz 13.5 der Vorlesung, weil für alle $0 \leqslant t < \infty$

$$\mathrm{e}^{-t}\frac{1}{1+t} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$$

gilt, und

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \lim_{b\to\infty} -\left[\mathrm{e}^{-t}\right]_{t=0}^{t=b} = 1 - \lim_{b\to\infty}\mathrm{e}^{-b} = 1.$$

c) Wir berechnen für $t > 1$ mit $f(t) = (\log(t))^2 t^{-\log(\log(t))} = (\log(t))^2\mathrm{e}^{-\log(t)\cdot\log(\log(t))}$, dass

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2(\log(t))\frac{1}{t}t^{-\log(\log(t))} + (\log(t))^2\left(t^{-\log(\log(t))}\left(-\frac{1}{t}-\frac{1}{t}\log(\log(t))\right)\right) \\ &= -t^{-1-\log(\log(t))}\log(t)(\log(t)(1+\log(\log(t)))-2). \end{aligned}$$

Es gibt also ein $c \in (1,\infty)$, so dass für $t \geq c$ die Funktion $t \mapsto (\log(t))^2 t^{-\log(\log(t))}$ monoton fällt. Substituiere $x = \log(t)$, $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$:

$$\int_c^\infty \frac{(\log(t))^2}{t^{\log(\log(t))}}\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\int_c^b \frac{(\log(t))^2}{t^{\log(\log(t))}}\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\int_{\log(c)}^{\log(b)} x^2\mathrm{e}^{x-x\log(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Sei $g(x) := x - x\log(x)$. Dann gilt $g'(x) = -\log(x)$ für $x > 0$ und damit $g'(x) < -1$ für $x > \mathrm{e}$. Zudem ist $g(\mathrm{e}^2) = -\mathrm{e}^2$ und somit

$$g(x) = g(\mathrm{e}^2) + \underbrace{\int_{\mathrm{e}^2}^x g'(y)\,\mathrm{d}y}_{=g(x)-g(\mathrm{e}^2)} < -\mathrm{e}^2 + \int_{\mathrm{e}^2}^x (-1)\,\mathrm{d}y = -x.$$

Wegen der Monotonie der Exponentialfunktion folgt für $x > \mathrm{e}^2$, dass $\mathrm{e}^{x-x\log(x)} < \mathrm{e}^{-x}$. Da nach Aufgabe 74 $\int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x < \infty$, konvergiert das Integral nach dem Majorantenkriterium und die Reihe nach 13.6.

Aufgabe 76 (Tutorium)

a) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^3 \frac{\mathrm{e}^{2t}}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t,$ (ii) $\displaystyle\int_{-1}^1 \log(|t|)\,\mathrm{d}t.$

b) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

(i) $\displaystyle\int_0^1 (\log(t))^4\,\mathrm{d}t,$ (ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\pi}} \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t.$

c) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{k=3}^\infty \frac{1}{(\log k)^{\log k}}$ auf Konvergenz mit Hilfe des Integralvergleichskriteriums.

Lösungsvorschlag

a) (i) Sei $a < 3$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\int_a^3 \frac{e^{2t}}{1+e^t}\,\mathrm{d}t \quad &\overset{s=e^t}{\underset{\mathrm{d}s=s\,\mathrm{d}t}{=}} \quad \int_{e^a}^{e^3} \frac{s^2}{1+s}\frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \int_{e^a}^{e^3} \frac{1+s-1}{1+s}\,\mathrm{d}s \\ &= \quad \int_{e^a}^{e^3} 1-\frac{1}{1+s}\,\mathrm{d}s = [s-\log(1+s)]_{s=e^a}^{s=e^3} \\ &= \quad e^3-\log(1+e^3)-e^a+\log(1+e^a) \xrightarrow{a\to-\infty} e^3-\log(1+e^3)\end{aligned}$$

Damit ist das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^3 \frac{e^{2t}}{1+e^t}\,\mathrm{d}t$ konvergent und es ist

$$\int_{-\infty}^3 \frac{e^{2t}}{1+e^t}\,\mathrm{d}t = e^3-\log(1+e^3)$$

(ii) Per Definition ist das uneigentliche Integral $\int_{-1}^1 \log(|t|)\,\mathrm{d}t$ genau dann konvergent, wenn die beiden uneigentlichen Integrale $\int_{-1}^0 \log(|t|)\,\mathrm{d}t$ und $\int_0^1 \log(|t|)\,\mathrm{d}t$ konvergent sind. In diesem Fall ist

$$\int_{-1}^1 \log(|t|)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^0 \log(|t|)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \log(|t|)\,\mathrm{d}t.$$

Sei $0 < a < 1$. Wegen

$$\int_{-1}^{-a} \log(|t|)\,\mathrm{d}t \overset{s=-t}{=} \int_a^1 \log(s)\,\mathrm{d}s = \int_a^1 \log(|t|)\,\mathrm{d}t$$

reicht es, nur eins der beiden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz zu untersuchen. Es gilt

$$\int_a^1 \log(t)\,\mathrm{d}t = [t\log(t)-t]_{t=a}^{t=1} = (-1-a\log(a)+a)$$

sowie

$$\lim_{a\to0+}(a-a\log(a)) = \lim_{a\to0+} a\log\left(\frac{1}{a}\right) = \lim_{a\to0+}\frac{\log\left(\frac{1}{a}\right)}{\frac{1}{a}} = \lim_{x\to\infty}\underbrace{\frac{\log(x)}{x}}_{\to\infty} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Folglich ist $\int_0^1 \log(|t|)\,\mathrm{d}t$ konvergent und es gilt:

$$\int_0^1 \log(|t|)\,\mathrm{d}t = \lim_{a\to0+}\int_a^1 \log(|t|)\,\mathrm{d}t = -1$$

und damit

$$\int_{-1}^1 \log(|t|)\,\mathrm{d}t = -2.$$

b) (i) Sei $0 < a < 1$. Es gilt:

$$\int_a^1 (\log(t))^4\,\mathrm{d}t \overset{t=e^{-s}}{\underset{\mathrm{d}t=-t\,\mathrm{d}s}{=}} -\int_{-\log(a)}^0 s^4e^{-s}\,\mathrm{d}s = \int_0^{\log\left(\frac{1}{a}\right)} s^4e^{-s}\,\mathrm{d}s$$

Wegen $\lim_{a\to 0+} \log\left(\frac{1}{a}\right) = \infty$, ist das uneigentliche Integral $\int_0^1 (\log(t))^4 \, \mathrm{d}t$ konvergent, wenn das uneigentliche Integral $\int_0^\infty s^4 e^{-s} \, \mathrm{d}s$ konvergent ist. Dies ist nach Aufgabe 70 tatsächlich der Fall.

(ii) Auf $(0,1]$ gilt $\sin(\frac{1}{t}) \leqslant 1$. Da das "uneigentliche" Integral

$$\int_0^1 1 \, \mathrm{d}t = \lim_{a\to 0} \int_a^1 1 \, \mathrm{d}t = \lim_{a\to 0} 1 - a = 1$$

konvergiert, konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch das Ausgangsintegral.

c) Die Funktion $t \mapsto (\log(t))^{-\log(t)}$ ist für $t \geq \mathrm{e}$ monoton fallend. Substitution $x = \log(t)$, $\mathrm{d}t = e^x \, \mathrm{d}x$ liefert

$$\int_3^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(\log(t))^{\log(t)}} = \int_{\log 3}^\infty \frac{\mathrm{e}^x}{x^x} \, \mathrm{d}x = \int_{\log 3}^\infty \mathrm{e}^{x - x\log(x)} \, \mathrm{d}x.$$

Wie in Aufgabe 75 c) berechnet, gilt $\mathrm{e}^{x-x\log(x)} < \mathrm{e}^{-x}$ für $x > \mathrm{e}^2$ und da das uneigentliche Integral $\int_{\mathrm{e}^2}^\infty \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x$ existiert (Wert $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^2}$) konvergiert auch das Ausgangsintegral und nach 13.6 die gegebene Reihe.

Aufgabe 77 (Übung)

a) Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen Untervektorräume bzw. affine Unterräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums V sind.

(i) $U_a := \{(a_n) \in V = \mathbb{K}^\mathbb{N} \mid \lim_{n\to\infty} a_n = a\}$, $\quad a \in \mathbb{K}$ fest,

(ii) $U := \{(x_1, x_2) \in V = \mathbb{K}^2 \mid x_1^2 + x_2^4 = 0\}$.

b) Beweisen Sie Satz 14.5 (1): Sei $\emptyset \neq M \subseteq V$ und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann ist $\operatorname{lin}(M)$ der Durchschnitt aller Untervektorräume von V, die M enthalten.

c) Seien $V = \mathbb{R}^\mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Weiter seien $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschiedene Zahlen (d.h. $\beta_i \neq \beta_j$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$). Zeigen Sie: Die Funktionen $f_1, \ldots, f_n \in V$, $f_i(x) = e^{\beta_i x}$ für alle $1 \leq i \leq n$ und alle $x \in \mathbb{R}$, sind linear unabhängig.

Arsinh

Lösungsvorschlag

a) (i) Sei $a = 0$. U_0 ist ein Untervektorraum von V, denn die konstante Nullfolge ist der Nullvektor in V und liegt gleichzeitig in U. Zudem gilt für zwei Folgen (a_n) und (b_n) mit $a_n \to 0$ und $b_n \to 0$ für $n \to \infty$ und $\alpha \in \mathbb{K}$, dass auch $a_n + b_n \to 0$ und $\alpha a_n \to 0$ für $n \to \infty$, also $(a_n) + (b_n)$, $\alpha(a_n) \in U_0$.
Sei $a \neq 0$. U_a ist kein Untervektorraum, da $0 \notin U$. Doch U_a kann geschrieben werden als $a + U_0$, wobei a die Folge ist, die konstant a ist. Da U_0 ein Untervektorraum von V ist, ist U_a somit ein affiner Unterraum von V.

(ii) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dann ist $x_1^2 + x_2^4 = 0$ genau dann, wenn $x_1 = x_2 = 0$ ist. Somit ist U der triviale Untervektorraum von V.
Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann ist $(\mathrm{i}, \mathrm{i}) \in U$ (wegen $\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^4 = 1$), aber $2(\mathrm{i}, \mathrm{i}) = (2\mathrm{i}, 2\mathrm{i})$ nicht, denn $(2\mathrm{i})^2 + (2\mathrm{i})^4 = -4 + 16 = 12$. Somit ist U kein Untervektorraum und da $0 \in U$ auch kein affiner Raum.

b) Wir wollen zeigen, dass

$$\mathrm{lin}(M) = \bigcap_{U \supset M, U \text{ UVR von } V} U.$$

Dass die rechte Menge in der linken enthalten ist, ist klar, da $\mathrm{lin}(M)$ ein solcher Untervektorraum von V ist. Sei nun U ein beliebiger Untervektorraum von V, der M enthält. Ein Element $x \in \mathrm{lin}(M)$ lässt sich per Definition als Linearkombination endlich vieler Elemente aus M schreiben. Da diese endlich vielen Elemente aus M auch in U liegen und dies ein Untervektorraum ist, liegt x somit auch in U. Somit ist $\mathrm{lin}(M)$ eine Teilmenge jedes solchen Untervektorraums, also auch des Schnittes über all diese Untervektorräume.

c) Wir zeigen die Aussage mittels Induktion über n.

Induktionsanfang ($n = 1$): Sei $\lambda_1 e^{\beta_1 x} = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da $e^{\beta_1 x} > 0$, folgt $\lambda_1 = 0$.

Induktionsschritt: Sei die Aussage für $n-1 \in \mathbb{N}$ bereits gezeigt (Induktionsvoraussetzung). Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 e^{\beta_1 x} + \ldots + \lambda_n e^{\beta_n x} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{$*$}$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $e^{-\beta_n x}$ und erhalten

$$\lambda_1 e^{(\beta_1 - \beta_n)x} + \ldots + \lambda_{n-1} e^{(\beta_{n-1} - \beta_n)x} + \lambda_n = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Wir differenzieren die letzte Gleichung und erhalten

$$\lambda_1(\beta_1 - \beta_n) e^{(\beta_1 - \beta_n)x} + \ldots + \lambda_{n-1}(\beta_{n-1} - \beta_n) e^{(\beta_{n-1} - \beta_n)x} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Da $\beta_1 - \beta_n, \ldots, \beta_{n-1} - \beta_n$ auch paarweise verschieden sind, folgt aus der Induktionsvoraussetzung

$$\lambda_1(\beta_1 - \beta_n) = \ldots = \lambda_{n-1}(\beta_{n-1} - \beta_n) = 0.$$

Da $\beta_i \neq \beta_n$ für $1 \leq i \leq n-1$, folgt $(\beta_i - \beta_n) \neq 0$ für $1 \leq i \leq n-1$ und damit

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0.$$

Aus ($*$) folgt $\lambda_n e^{\beta_n x} = 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_n = 0$. Also sind $f_1, \ldots, f_n$ linear unabhängig.

Aufgabe 78 (Tutorium)

a) Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen Untervektorräume bzw. affine Unterräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums V sind.

(i) $U := \{(a_n) \in V = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ ist absolut konvergent}\}$,

(ii) $U := \{(x_1, x_2, x_3) \in V = \mathbb{K}^3 \mid x_1 = 2x_2 = -3x_3\}$,

(iii) $U := \{f \in V = C^1[0,1] \mid \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + f'(1/2) = 1\}$,

(iv) $U := \{f \in V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ hat mindestens eine Nullstelle}\}$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\cosh, \cosh^2 \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ linear unabhängig sind. Gilt dies auch für die Funktionen 1, $\sinh^2$ und $\cosh^2$?

Lösungsvorschlag

a) (i) U ist ein Untervektorraum von V, denn die konstante Nullfolge liegt in U und mit (a_n), $(b_n) \in U$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n + b_n| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha a_n| = |\alpha| \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty,$$

womit die definierenden Eigenschaft eines Untervektorraums gezeigt sind.

(ii) U ist ein Untervektorraum von V, denn der Nullvektor $(0,0,0)$ liegt in U und mit $(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \in U$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$(x_1 + y_1) = 2x_2 + 2y_2 = 2(x_2 + y_2) = -3x_3 - 3y_3 = -3(x_3 + y_3), \quad \alpha x_1 = 2\alpha x_2 = -3\alpha x_3,$$

also $(x_1,x_2,x_3) + (y_1,y_2,y_3), \alpha(x_1,x_2,x_3) \in U$, womit die definierenden Eigenschaft eines Untervektorraums gezeigt sind.

(iii) Nach Vorlesung ist $C^1[0,1]$ ein Vektorraum. Außerdem ist jede Funktion in $C^1[0,1]$ auf Riemann-integrierbar auf $[0,1]$. U ist kein Untervektorraum, da die konstante Nullfunktion nicht in U liegt. Es ist jedoch ein affiner Unterraum, denn: Die konstante Einsfunktion 1 liegt in U und U kann geschrieben werden als

$$1 + \underbrace{\{f \in R[0,1] \cap C^1[0,1] \mid \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + f'(1/2) = 0\}}_{=:W},$$

was daran liegt, dass das Integral und die Ableitung sich linear Verhalten ($\int_0^1 (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$, $(f+g)'(1/2) = f'(1/2) + g'(1/2)$). Da dasselbe für einen Vorfaktor $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt ($\int_0^1 (\alpha f)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, $(\alpha f)'(1/2) = \alpha f'(1/2)$) und die konstante Nullfunktion in W liegt, ist die Untervektorraumeigenschaft von W gezeigt.

(iv) U ist weder ein Untervektorraum noch ein affiner Unterraum von V, denn die konstante Nullfunktion liegt in U, genau wie die beiden Funktionen $x \mapsto x^2$ und $x \mapsto (x+1)^2$, aber $x \mapsto x^2 + (x+1)^2 = 2x^2 + 2x + 1$ hat keine reelle Nullstelle.

b) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha \cosh(x) + \beta \cosh^2(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Setzen wir $x = 0$ in diese Gleichung ein, ergibt sich $\alpha = -\beta$. Leiten wir die Gleichung zwei Mal ab, ergibt sich

$$\alpha \sinh(x) + 2\beta \cosh(x) \sinh(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

und

$$\alpha \cosh(x) + 2\beta \cosh^2(x) + 2\beta \sinh^2(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Setzen wir $x = 0$ in diese Gleichung ein, ergibt sich $\alpha = -2\beta$. Somit folgt $\beta = 2\beta$, also $\beta = 0$ und somit $\alpha = 0$.

Die drei Funktionen 1, $\sinh^2$ und $\cosh^2$ sind nicht linear unabhängig, denn wegen $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$1 + \sinh^2 - \cosh^2 = 0,$$

sodass sich die drei Funktionen nicht-trivial zu 0 linear kombinieren lassen.