Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2018/2019
31.01.2019

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

14. Übungsblatt

Aufgabe 79 (Übung)

a) Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha-1 & \beta+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

und entscheiden Sie, in Abhängigkeit von den Parametern α und β, ob das Gleichungssystem lösbar ist. Berechnen Sie gegebenenfalls alle Lösungen. Geben Sie außerdem eine Basis der linearen Hülle der Zeilen der Matrix an.

b) Geben Sie für folgende Vektorräume jeweils eine Basis an.

(i) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 = x_3\}$,

(ii) $\operatorname{lin}(\{x^2,\, x^2+x,\, x^2+1,\, x^2+x+1,\, x^7+x^5\})$

Aufgabe 80 (Tutorium)

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie $\operatorname{rg}(A)$, $\operatorname{rg}(A|b)$ und $\operatorname{rg}(A|c)$.

b) Bestimmen Sie $\dim(\operatorname{Kern} A)$ und geben Sie die Lösungsmenge der Gleichung $Ax = 0$ an.

c) Geben Sie die Lösungsmenge der Gleichungen $Ax = b$ und $Ax = c$ an.

Aufgabe 81 (Übung)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n k x_k$ eine Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass ϕ linear ist.

b) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern}\phi$ und eine Basis von $\operatorname{Bild}\phi$.

c) Für welche n ist ϕ injektiv?

Aufgabe 82 (Tutorium)

a) Berechnen Sie alle Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$$

b) Im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^4$ seien der Vektor $y = (1, 5\mathrm{i} - 1, 1 - \mathrm{i}, c^2)$ und der Untervektorraum

$$U = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{i} \\ -c-\mathrm{i} \\ c^2+2c\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i}-1+c \\ -c-\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben. Bestimmen Sie alle $c \in \mathbb{C}$, für die $y \in U$ gilt.

Aufgabe 83 (Übung)

Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ sei die transponierte Matrix A^T definiert durch $A^T = (a_{ji}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Die Abbildung $P : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}^{n\times n}$ sei definiert durch

$$P(A) = \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_{11} + a_{11} & \dots & a_{1n} + a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + a_{1n} & \dots & a_{nn} + a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

a) P ist eine lineare Abbildung.

b) $\operatorname{Kern} P = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid A^T = -A\}$ (die Menge der schief-symmetrischen Matrizen).

c) $\operatorname{Bild} P = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid A^T = A\}$ (die Menge der symmetrischen Matrizen).

d) $\dim(\operatorname{Bild} P)) = \frac{n(n+1)}{2}$, $\dim(\operatorname{Kern} P) = \frac{n(n-1)}{2}$

Aufgabe 84 (Tutorium)

a) Gegeben sei die Abbildung $\phi\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_1 + x_2)$.
Ist ϕ linear? Bestimmen Sie $\operatorname{Kern}\phi$ und $\operatorname{Bild}\phi$.

b) Sei $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3}$. Berechnen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern} A$ und von $\operatorname{Bild} A$.