Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 14. Übungsblatt

Aufgabe 79 (Übung)

a) Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha-1 & \beta+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

und entscheiden Sie, in Abhängigkeit von den Parametern α und β, ob das Gleichungssystem lösbar ist. Berechnen Sie gegebenenfalls alle Lösungen. Geben Sie außerdem eine Basis der linearen Hülle der Zeilen der Matrix an.

b) Geben Sie für folgende Vektorräume jeweils eine Basis an.

(i) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 = x_3\}$,

(ii) $\operatorname{lin}(\{x^2, x^2+x, x^2+1, x^2+x+1, x^7+x^5\})$

Lösungsvorschlag

a) Wir formen die Matrix so weit zu einer Zeilenstufenform um, wie die Allgemeinheit von α und β es zulässt.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha-1 & \beta+2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & \beta & 2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \beta-\alpha^2 & 2-\alpha \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \beta-\alpha^2 & 2-\alpha \end{array}\right)$$

Nun folgt eine Fallunterscheidung.
<u>1. Fall:</u> $\beta \neq \alpha^2$. Sei $\gamma := \frac{2-\alpha}{\beta-\alpha^2}$. Wir dividieren die dritte Zeile durch $\beta-\alpha^2$ und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2-(2+\alpha)\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 1-\alpha\gamma \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{array}\right)$$

Die Zeilen der Matrix sind demnach linear unabhängig und bilden eine Basis ihrer linearen Hülle. Das Gleichungssystem ist außerdem eindeutig Lösbar, die Lösung lautet

$$x = \begin{pmatrix} 2-(2+\alpha)\gamma \\ 1-\alpha\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\frac{4-\alpha^2}{\beta-\alpha^2} \\ 1-\frac{\alpha(2-\alpha)}{\beta-\alpha^2} \\ \frac{2-\alpha}{\beta-\alpha^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta-\alpha^2}\begin{pmatrix} 2\beta-\alpha^2-4 \\ \beta-2\alpha \\ 2-\alpha \end{pmatrix}$$

<u>2. Fall:</u> $\beta = \alpha^2$, $\alpha \neq 2$. Das Gleichungssystem hat die Form

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\alpha \end{array}\right)$$

und ist wegen $2-\alpha \neq 0$ nicht lösbar, da die erweiterte Matrix mit 3 einen höheren Rang hat als die Matrix selbst. Die ersten beiden Zeilen der Matrix bilden außerdem eine Basis der linearen Hülle der Zeilen der Matrix, die dritte Zeile ist die Summe der ersten Zeile und dem α-fachen der zweiten Zeile.
<u>3. Fall:</u> $\beta = \alpha^2$, $\alpha = 2$ (also $\beta = 4$). Die Matrix hat die Form

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und ist in Zeilennormalform. Die ersten beiden Zeilen der Matrix bilden außerdem eine Basis der linearen Hülle der Zeilen der Matrix, die dritte Zeile ist die Summe der ersten Zeile und dem α-fachen der zweiten Zeile. Ausgeschrieben lauten die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_3 &= 2, \\ x_2 + 2x_3 &= 1, \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - 4x_3, \\ x_2 &= 1 - 2x_3, \\ x_3 &= x_3. \end{aligned}$$

x_3 ist also ein frei wählbarer Paramter und der Lösungsraum der gegebenen Gleichung lautet

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{K} \right\}.$$

Alternativ kann man in Matrixform den so genannten (-1)-Trick anwenden. Ist die Matrix in Zeilennormalform, ergänze man die gesamte Matrix so durch Nullzeilen, dass die nicht erweiterte Matrix quadratisch ist und die Nicht-Nullzeilen ihre vorhandene erste Eins auf der Diagonale dieser Matrix haben (dies ist hier bereits der Fall, links steht eine 3×3-Matrix mit ihren Einsen auf der Diagonalen. Nun ersetzt man die Nullen auf der Diagonale durch (-1)en. Die spezielle Lösung des Gleichungssystems ist über die Spalte ganz rechts abzulesen, der Lösungsraum der homogenen Gleichung (mit Parameter davor) ist durch die Spalten der Matrix links gegeben, die zu einer eingefügten (-1) gehören.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & (-1) & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{K} \right\}$$

Hinweis: Der Vektor $(4,2,-1)$ hat hierbei ein anderes Vorzeichen als bei der oberen Methode, durch die freie Wahl von $s \in \mathbb{K}$ handelt es sich jedoch um die Gleiche Lösungsmenge.

b) (i) Eine Basis ist gegeben durch $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,0)$, denn aus $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$ folgt $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1) = (0,0,0,)$, also $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; ist ferner $v \in \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 = x_3\}$, so gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $v = (a,b,a)$, also $v = av_1 + bv_2$.

(ii) Wir zeigen zunächst, dass $\{x^2,\, x^2 + x,\, x^2 + 1,\, x^7 + x^5\}$ linear unabhängig ist: Es gelte

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2(x^2 + x) + \lambda_3(x^2 + 1) + \lambda_4(x^7 + x^5) = 0,$$

also

$$\lambda_3 + \lambda_2 x + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)x^2 + \lambda_4 x^5 + \lambda_4 x^7 = 0.$$

Da die Polynome $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\} \subset P$ linear unabhängig sind, folgt

$$\lambda_3 = 0, \quad ,\lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 0,$$

also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Damit ist $\{x^2,\, x^2 + x,\, x^2 + 1,\, x^7 + x^5\}$ linear unabhängig. Schließlich lässt sich das Polynom $x^2 + x + 1$ als Linearkombination aus den restlichen Polynomen darstellen, und zwar gilt

$$-x^2 + (x^2 + x) + (x^2 + 1) = x^2 + x + 1.$$

Damit ist $\operatorname{lin}(\{x^2,\, x^2 + x,\, x^2 + 1,\, x^2 + x + 1,\, x^7 + x^5\})$ ein 4-dimensionaler Vektorraum und

$$\{x^2,\, x^2 + x,\, x^2 + 1,\, x^7 + x^5\}$$

ist eine Basis dieses Vektorraums.

Alternativ: Offensichtlich ist dann auch $\{1,\, x,\, x^2, x^7 + x^5\}$ eine Basis (die Vektoren sind linear unabhängig und jeder Vektor lässt sich als Linearkombination der Vektoren der ersten Basis schreiben).

Aufgabe 80 (Tutorium)

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie $\operatorname{rg}(A)$, $\operatorname{rg}(A|b)$ und $\operatorname{rg}(A|c)$.

b) Bestimmen Sie $\dim(\operatorname{Kern} A)$ und geben Sie die Lösungsmenge der Gleichung $Ax = 0$ an.

c) Geben Sie die Lösungsmenge der Gleichungen $Ax = b$ und $Ax = c$ an.

Lösungsvorschlag

a) Wir bringen die erweiterte Matrix $(A|b|c)$ auf Zeilennormalform. Wir schreiben beide Vektoren b und c in die Erweiterung, da die Zeilennormalform nur von der Matrix A abhängt und die Operationen somit bei beiden erweiterten Matrizen dieselben sind.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c|c} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 2 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccccc|c|c} -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 2 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 5 \quad \cdot 3 \quad | \cdot (-1) \\ + \\ + \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccccc|c|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & -2 & -1 & 5 & 13 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & -2 & -1 & 5 & 13 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \quad | \cdot \frac{1}{6} \\ + \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccccc|c|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccccc|c|c} 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Wir erkennen somit, dass $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b) = 2$, $\operatorname{rg}(A|c) = 3$.

b) Nach Satz 14.10 ist $\dim(\operatorname{Bild} A) = \operatorname{rg}(A) = 2$ und nach der Dimensionsformel in 14.11 demensprechend (die Matrix besitzt 6 Spalten)

$$\dim(\operatorname{Kern} A) = 6 - \dim(\operatorname{Bild} A) = 6 - 2 = 4.$$

Schreiben wir $Ax = 0$ in der obigen Zeilennormalform zu einem Gleichungssystem um, ergibt sich

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{2}{3}x_4 + \frac{5}{6}x_5 - \frac{1}{6}x_6 &= 0, \\ x_2 + \frac{7}{6}x_3 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{6}x_5 + \frac{5}{6}x_6 &= 0, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{6}x_3 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{5}{6}x_5 + \frac{1}{6}x_6, \\ x_2 &= -\frac{7}{6}x_3 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{6}x_5 - \frac{5}{6}x_6. \\ x_3 &= x_3, \\ x_4 &= x_4, \\ x_5 &= x_5, \\ x_6 &= x_6. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich als Lösungsmenge der Gleichung $Ax = 0$, indem wir x_3 bis x_6 durch beliebige Parameter ersetzen,

$$\left\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{6}s - \frac{2}{3}t - \frac{5}{6}u + \frac{1}{6}v \\ -\frac{7}{6}s + \frac{1}{3}t + \frac{1}{6}u - \frac{5}{6}v \\ s \\ t \\ u \\ v \end{pmatrix}, s,t,u,v \in \mathbb{K}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} -s - 4t - 5u + 1v \\ -7s + 2t + u - 5v \\ 6s \\ 6t \\ 6u \\ 6v \end{pmatrix}, s,t,u,v \in \mathbb{K}\right\},$$

wobei wir für die zweite Menge jeden Parameter durch sein Sechsfaches ersetzt haben. Analog erhält man das Resultat über den (-1)-Trick (die einzelnen Vektoren mit ihren Parametern wurden hier zu einem Vektor zusammengefasst).

c) Das Gleichungssystem $Ax = c$ ist unlösbar, da $\operatorname{rg}(A|c) = 3 \neq 2 = \operatorname{rg}(A)$. Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist lösbar und die allgemeine Lösung ist gegeben als Summe einer speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung. Mit dem gleichen Vorgehen wie in **b)** gilt nämlich

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{5}{6} - \frac{1}{6}x_3 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{5}{6}x_5 + \frac{1}{6}x_6, \\ x_2 &= \frac{13}{6} - \frac{7}{6}x_3 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{6}x_5 - \frac{5}{6}x_6. \\ x_3 &= x_3, \\ x_4 &= x_4, \\ x_5 &= x_5, \\ x_6 &= x_6, \end{aligned}$$

und somit ist die Lösungsmenge

$$\left\{\begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{13}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}s - \frac{2}{3}t - \frac{5}{6}u + \frac{1}{6}v \\ -\frac{7}{6}s + \frac{1}{3}t + \frac{1}{6}u - \frac{5}{6}v \\ s \\ t \\ u \\ v \end{pmatrix}, s,t,u,v \in \mathbb{K}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{13}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -s - 4t - 5u + 1v \\ -7s + 2t + u - 5v \\ 6s \\ 6t \\ 6u \\ 6v \end{pmatrix}, s,t,u,v \in \mathbb{K}\right\}.$$

Aufgabe 81 (Übung)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\phi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n kx_k$ eine Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass ϕ linear ist.

b) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern}\phi$ und eine Basis von $\operatorname{Bild}\phi$.

c) Für welche n ist ϕ injektiv?

Lösungsvorschlag

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\phi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n kx_k$ eine Abbildung.

a) Aufgrund von

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{1\times n}$$

ist $\phi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ linear.

Alternativ kann man die Linearität von ϕ auch wie folgt begründen:

Für beliebige $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$\phi(\alpha x + y) = \phi\left(\begin{pmatrix} \alpha x_1 + y_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n + y_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{k=1}^{n} k(\alpha x_k + y_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} k x_k + \sum_{k=1}^{n} k y_k = \alpha\phi(x) + \phi(y).$$

b) Wegen $\phi\left(\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1 \cdot a = a$ für jedes $a \in \mathbb{K}$ gilt Bild $\phi = \mathbb{K}$, also ist $\{1\}$ eine Basis von Bild A = Bild ϕ.

Insbesondere ist dim (Bild A) = 1.

Nun überlegen wir uns, wie viele Basisvektoren Kern ϕ = Kern A aufspannen. Die Dimensionsformel liefert n = dim (Bild A) + dim (Kern A), folglich ist dim Kern $A = n - 1$. Wir bestimmen Kern ϕ = Kern A: Jeder der $n-1$ Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

ist in Kern ϕ enthalten. Diese Vektoren (bzw. die Negativen davon) erhalten wir durch Einsetzen von Parametern für $x_2, \ldots, x_n$ in der Gleichung

$$x_1 + 2x_2 + \cdots + (n-1)x_{n-1} + nx_n = 0$$

oder über den (-1)-Trick (denn Kern A ist die Lösungsmenge der Gleichung $Ax = 0$). Da die angegebenen $n-1$ Vektoren linear unabhängig sind, bilden diese eine Basis von Kern ϕ:

$$\text{Kern } \phi = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

c) Wegen ϕ injektiv $\iff$ Kern $\phi = \{0\}$ $\iff$ dim Kern $\phi = 0$ ist ϕ genau für $n = 1$ injektiv.

Aufgabe 82 (Tutorium)

a) Berechnen Sie alle Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2\,x_3 + 4\,x_4 = 5, \\ 2\,x_1 + 2\,x_2 - 3\,x_3 + x_4 = 3, \\ 3\,x_1 + 3\,x_2 - 4\,x_3 - 2\,x_4 = 1. \end{cases}$$

b) Im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^4$ seien der Vektor $y = (1, 5\mathrm{i} - 1, 1 - \mathrm{i}, c^2)$ und der Untervektorraum

$$U = \mathrm{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{i} \\ -c-\mathrm{i} \\ c^2 + 2c\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i}-1+c \\ -c-\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}\}$$

gegeben. Bestimmen Sie alle $c \in \mathbb{C}$, für die $y \in U$ gilt.

Lösungsvorschlag

a) Aus

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2\,x_3 + 4\,x_4 = 5 \\ 2\,x_1 + 2\,x_2 - 3\,x_3 + x_4 = 3 \\ 3\,x_1 + 3\,x_2 - 4\,x_3 - 2\,x_4 = 1 \end{cases}$$

erhalten wir (subtrahiere das Zwei- bzw. Dreifache der ersten Zeile von der zweiten bzw. dritten Zeile)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2\,x_3 + 4\,x_4 = 5 \\ x_3 - 7x_4 = -7 \\ 2x_3 - 14\,x_4 = -14 \end{cases}$$

und damit (subtrahiere das Zweifache der zweiten Zeile von der dritten Zeile)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2\,x_3 + 4\,x_4 = 5 \\ x_3 - 7x_4 = -7 \end{cases}$$

Dies bedeutet schließlich (addiere das Zweifache der zweiten Zeile zur Ersten)

$$\begin{cases} x_1 = -9 - x_2 + 10x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = -7 + 7x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

Damit ist die Lösungsmenge gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{K} \right\}.$$

b) Seien

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{i} \\ -c-\mathrm{i} \\ c^2+2c\mathrm{i} \end{pmatrix}, v_4 := \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i}-1+c \\ -c-\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Gesucht sind Koeffizienten $x_1, \dots, x_4 \in \mathbb{C}$ mit $\sum_{n=1}^{4} x_n v_n = y$. Dies ist gleichbedeutend mit dem Lösen eines Gleichungssystems, dass als Spalten der Matrix die Vektoren $v_1, \dots, v_4$ besitzt und als rechte Seite den Vektor y. Wir bringen die zugehörige erweiterte Matrix auf Stufenform.

$$\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \mathrm{i} & 1 \\ \mathrm{i} & -1-\mathrm{i} & -\mathrm{i} & \mathrm{i}-1+c & 5\mathrm{i}-1 \\ 0 & 1+\mathrm{i} & -c-\mathrm{i} & -c-\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ 2 & 0 & c^2+2c\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & c^2 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \cdot(-\mathrm{i}) \quad \cdot(-2) \\ + \\ \\ + \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \mathrm{i} & 1 \\ 0 & -1-\mathrm{i} & -\mathrm{i} & \mathrm{i}+c & 4\mathrm{i}-1 \\ 0 & 1+\mathrm{i} & -c-\mathrm{i} & -c-\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ 0 & 0 & c^2+2c\mathrm{i} & 0 & c^2-2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ + \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \mathrm{i} & 1 \\ 0 & -1-\mathrm{i} & -\mathrm{i} & \mathrm{i}+c & 4\mathrm{i}-1 \\ 0 & 0 & -c-2\mathrm{i} & 0 & 3i \\ 0 & 0 & c^2+2c\mathrm{i} & 0 & c^2-2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot c \\ + \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \mathrm{i} & 1 \\ 0 & -1-\mathrm{i} & -\mathrm{i} & \mathrm{i}+c & 4\mathrm{i}-1 \\ 0 & 0 & -c-2\mathrm{i} & 0 & 3i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c^2+3c\mathrm{i}-2 \end{array}\right)$$

Dieses Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn der Rang der erweiterten Matrix dem Rang der nicht erweiterten entspricht (also 3). Dies ist genau dann der Fall, wenn $(c+\mathrm{i})(c+2\mathrm{i}) = c^2+3c\mathrm{i}-2 = 0$ und $-c-2\mathrm{i} \neq 0$, also für ($c = -\mathrm{i}$ oder $c = -2\mathrm{i}$) und $c \neq -2\mathrm{i}$, also für $c = -\mathrm{i}$. Für dieses c finden wir eine Lösung, womit $y \in U$ gilt, andernfalls gilt $y \notin U$.

Aufgabe 83 (Übung)

Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ sei die transponierte Matrix A^T definiert durch $A^T = (a_{ji}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Die Abbildung $P : \mathbb{K}^{n \times n} \to \mathbb{K}^{n \times n}$ sei definiert durch

$$P(A) = \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_{11}+a_{11} & \dots & a_{1n}+a_{n1} \\ & \vdots & \vdots \\ a_{n1}+a_{1n} & \dots & a_{nn}+a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

a) P ist eine lineare Abbildung.

b) $\operatorname{Kern} P = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid A^T = -A\}$ (die Menge der schief-symmetrischen Matrizen).

c) $\operatorname{Bild} P = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid A^T = A\}$ (die Menge der symmetrischen Matrizen).

d) $\dim(\text{Bild}\,P)) = \frac{n(n+1)}{2}$, $\dim(\text{Kern}\,P) = \frac{n(n-1)}{2}$

Lösungsvorschlag

a) Es gilt $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ sowie $(A+B)^T = A^T + B^T$ für $\alpha \in \mathbb{K}$ und $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, wie man direkt anhand der Definition erkennt. Damit folgt

$$P(\alpha A) = \frac{1}{2}(\alpha A + (\alpha A)^T) = \frac{1}{2}(\alpha A + \alpha A^T) = \alpha \cdot \frac{1}{2}(A + A^T) = \alpha P(A),$$

sowie

$$\begin{aligned} P(A+B) &= \frac{1}{2}((A+B) + (A+B)^T) = \frac{1}{2}(A + B + A^T + B^T) \\ &= \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(B + B^T) = P(A) + P(B). \end{aligned}$$

Also ist P eine lineare Abbildung.

b) $A \in \text{Kern} P \;\Leftrightarrow\; A + A^T = 0 \;\Leftrightarrow\; A^T = -A.$

c) (i) Sei $B \in \mathbb{K}^{n\times n} \Rightarrow P(B)^T = \frac{1}{2}(B+B^T)^T = \frac{1}{2}(B^T + B) = P(B)$, da $(B^T)^T = B$ anhand der Definition. Also gilt $\text{Bild} P \subset \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} :\; A = A^T\}$.

(ii) Sei $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $C^T = C$. Dann gilt $\frac{1}{2}(C + C^T) = \frac{1}{2}(2C) = C$, also $P(C) = C$. Es folgt $\{A \in \mathbb{K}^{n\times n} :\; A = A^T\} \subset \text{Bild} P$.

Insgesamt folgt aus (i) und (ii): $\text{Bild} P = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} :\; A = A^T\}$.

d) Eine Basis von $\text{Bild}(P)$ wird durch die folgenden Matrizen gebildet:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & \\ 1 & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \ldots$$

(Einsen auf der Diagonale bzw. in gegenüberliegenden Einträgen abseits der Diagonalen). Diese Matrizen sind offenbar linear unabhängig, außerdem läßt sich jede symmetrische Matrix als Linearkombination dieser Matrizen schreiben. Also bilden obige Matrizen eine Basis. Da man in der rechten oberen Dreiecksmatrix stets ein Element $= 1$ wählen kann und den Rest $= 0$, besteht diese Basis aus

$$n + (n-1) + \ldots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

Elementen, also $\dim(\operatorname{Bild} P) = \frac{n(n+1)}{2}$. Ferner erhalten wir

$$\begin{aligned}\dim(\operatorname{Kern} P) &= \dim(\mathbb{K}^{n\times n}) - \dim(\operatorname{Bild} P)\\ &= n^2 - \frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{n(n-1)}{2}.\end{aligned}$$

Aufgabe 84 (Tutorium)

a) Gegeben sei die Abbildung $\phi\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2,\ (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_1 + x_2)$.
Ist ϕ linear? Bestimmen Sie $\operatorname{Kern}\phi$ und $\operatorname{Bild}\phi$.

b) Sei $A = \begin{pmatrix}-3 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3}$. Berechnen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern} A$ und von $\operatorname{Bild} A$.

Lösungsvorschlag

a) Wegen $\phi(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_1+x_2\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ mit $A := \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ ist ϕ linear. Die Zeilennormalform von A ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Der Kern von ϕ ist der Kern von A und somit die Lösungsmenge von $Ax = 0$. In Zeilennormalform ergibt dies die Forderung

$$x_1 + x_2 = 0,$$

somit als Lösungsmenge $\operatorname{Kern}\phi = \operatorname{Kern} A = \left\{s\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, s \in \mathbb{K}\right\}$. Das Bild von ϕ ist die Menge $\{\phi(x) : x \in \mathbb{K}^2\}$, die aufgespannt wird durch die Bilder der Einheitsvektoren e_1, e_2, was gerade die Spalten von A sind. Somit gilt $\operatorname{Bild}\phi = \operatorname{Bild} A = \left\{s\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, s \in \mathbb{K}\right\}$.

b) Zunächst bringen wir A mittels Zeilenumformungen auf Zeilennormalform:

$$\begin{pmatrix}-3 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix} \begin{matrix}\cdot\frac{1}{3} \quad \cdot(-\frac{2}{3}) \quad \mid \cdot(-\frac{1}{3})\\ + \\ + \end{matrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{2}{3}\\ 0 & 1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & \frac{2}{3}\end{pmatrix} \begin{matrix}\\ \cdot(-1)\\ + \end{matrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{2}{3}\\ 0 & 1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Daraus erkennen wir mit dem üblichen Vorgehen, dass

$$\operatorname{Kern} A = \{x \in \mathbb{K}^3 \mid Ax = 0\} = \left\{s\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\\ -1\end{pmatrix}, s \in \mathbb{K}\right\} = \left\{s\begin{pmatrix}-2\\ 2\\ -3\end{pmatrix}, s \in \mathbb{K}\right\}$$

Folglich ist $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ eine Basis von Kern A und es gilt $\dim(\operatorname{Kern} A) = 1$. Die Dimensionsformel liefert $\dim(\operatorname{Bild} A) = 3 - \dim(\operatorname{Kern} A) = 3 - 1 = 2$. Da die beiden Vektoren $Ae_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, Ae_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Bild} A$ linear unabhängig sind, bilden diese eine Basis von Bild A, also

$$\operatorname{Bild} A = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$