Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2018/2019
07.02.2019

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

15. Übungsblatt

Aufgabe 85 (Übung)

a) Die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\phi(e_3) = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3, \qquad \phi(e_2 + e_3) = e_1, \qquad \phi(e_1 + e_2 + e_3) = e_2 - e_3.$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen A_B^B und $A_{B'}^{B'}$ von ϕ bezüglich der Standardbasis B des $\mathbb{R}^3$ sowie bezüglich der Basis $B' = \{e_3, e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3\}$.

b) Die lineare Abbildung $P : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei gegeben durch $P(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$ (siehe Aufgabe 83). Geben Sie die Abbildungsmatrix A_B^B von P bezüglich der Basis $B = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ an.

Aufgabe 86 (Übung)

In $\mathbb{R}^{4\times 4}$ bzw. $\mathbb{R}^{3\times 3}$ seien die folgenden Matrizen gegeben.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie, ob diese Matrizen regulär sind. Berechnen Sie, wenn möglich, A^{-1}, B^{-1}, C^{-1} und $(AB)^{-1}$.

Aufgabe 87 (Übung)

a) Zeigen Sie, dass für $n, m \in \mathbb{N}$ durch die Abbildung

$$(\cdot|\cdot)_F : \mathbb{K}^{n\times m} \times \mathbb{K}^{n\times m} \to \mathbb{K}, \qquad ((a_{jk}), (b_{jk})) \mapsto \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{jk} \overline{b_{jk}}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^{n\times m}$ definiert wird (das sogenannte Frobenius-Skalarprodukt).

b) Sei $\ell^1 := \{(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty\}$. Zeigen Sie, dass durch $\|\cdot\|_1 : \ell^1 \to \mathbb{R}, (a_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ eine Norm auf ℓ^1 definiert wird. Weisen Sie nach, dass es kein Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$ auf ℓ^1 geben kann mit $(a|a) = \|a\|_1^2$ für alle $a = (a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Erinnerung

- Die **Modulprüfung** findet am **21.02.2019** von **8 bis 10 Uhr** statt. **Anmeldeschluss** ist der **10.02.2019**
- **Anmeldung zur Prüfung** unter `https://campus.studium.kit.edu/exams/registration.php`
- **Hörsaalverteilung** ab dem **13.02.2019** am schwarzen Brett neben Zimmer 2.027 im Allianzgebäude
- Als Hilfsmittel zugelassen sind zwei beidseitig handbeschriebene DIN-A4-Blätter
- Die **Einsicht** findet am **25.04.2019** von **16 bis 18 Uhr** im **Messtechnik-Hörsaal** (Geb. 30.33) statt