Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 15. Übungsblatt

Aufgabe 85 (Übung)

a) Die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\phi(e_3) = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3, \qquad \phi(e_2 + e_3) = e_1, \qquad \phi(e_1 + e_2 + e_3) = e_2 - e_3.$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen A_B^B und $A_{B'}^{B'}$ von ϕ bezüglich der Standardbasis B des $\mathbb{R}^3$ sowie bezüglich der Basis $B' = \{e_3, e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3\}$.

b) Die lineare Abbildung $P : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei gegeben durch $P(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$ (siehe Aufgabe 83). Geben Sie die Abbildungsmatrix A_B^B von P bezüglich der Basis $B = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ an.

Lösungsvorschlag

a) Um die Darstellungsmatrix bezüglich bestimmter Basen rauszufinden, müssen wir die Elemente der Basis im Urbildraum einsetzen und das Bild dieser Basisvektoren anhand der Basis im Bildraum ausdrücken. Wir machen dies zuerst für die Standardbasis B. Da ϕ linear ist, gilt

$$\phi(e_1) = \phi((e_1 + e_2 + e_3) - (e_2 + e_3)) = \phi(e_1 + e_2 + e_3) - \phi(e_2 + e_3) = e_2 - e_3 - (e_1) = -e_1 + e_2 - e_3,$$
$$\phi(e_2) = \phi((e_2 + e_3) - e_3) = \phi(e_2 + e_3) - \phi(e_3) = e_1 - (2e_1 + 3e_2 + 5e_3) = -e_1 - 3e_2 - 5e_3,$$
$$\phi(e_3) = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3.$$

Somit ist die Abbildungsmatrix gegeben durch

$$A_B^B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Die Bilder der Basisvektoren von B' kennen wir bereits, wir müssen Sie bloß umschreiben. Es gilt

$$\phi(e_3) = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3 = 2e_3 + (e_2 + e_3) + 2(e_1 + e_2 + e_3),$$
$$\phi(e_2 + e_3) = e_1 = -(e_2 + e_3) + (e_1 + e_2 + e_3),$$
$$\phi(e_1 + e_2 + e_3) = e_2 - e_3 = -2\mathrm{e}_3 + (e_2 + e_3).$$

Somit ist die Abbildungsmatrix gegeben durch

$$A_{B'}^{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Bezeichnen wir die vier Basismatrizen in ihrer Reihenfolge als b_1, b_2, b_3 und b_4, so gilt

$$P(b_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = b_1,$$

$$P(b_2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{2}b_3,$$

$$P(b_3) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{2}b_3,$$

$$P(b_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = b_4.$$

Die Abbildungsmatrix ist somit gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 86 (Übung)

In $\mathbb{R}^{4\times 4}$ bzw. $\mathbb{R}^{3\times 3}$ seien die folgenden Matrizen gegeben.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie, ob diese Matrizen regulär sind. Berechnen Sie, wenn möglich, A^{-1}, B^{-1}, C^{-1} und $(AB)^{-1}$.

Lösungsvorschlag

Die Matrix C ist nicht regulär, da sie Rang 2 besitzt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \cdot(-4) \quad \cdot(-2) \quad \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & -8 & -2 \end{pmatrix} \quad \cdot(-1) \quad \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen A und B sind regulär, ihre Inversen ergeben sich durch

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \cdot 5 \\ + \\ \\ \end{array}
$$

$$
\to \left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -14 & 5 & -5 & 0 & 5 & 1 & 0 \\
0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l} + \\ \cdot \frac{14}{3} \quad \cdot(-2) \\ + \quad\quad\quad\quad | \cdot 3 \\ + \end{array}
$$

$$
\to \left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 14 & 15 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ + \quad | \cdot \frac{1}{3} \\ + \\ \\ \end{array}
$$

$$
\to \left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 12 & 15 & 3 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

Deshalb gilt

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 12 & 15 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .
$$

Analog folgt

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
-1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l} + \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-3) \\ + \end{array}
\to \left(\begin{array}{cccc|cccc}
-1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l} + \quad | \cdot (-1) \\ \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
\to \left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1
\end{array}\right),
$$

also

$$
B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} .
$$

Nach Vorlesung ist nun auch AB regulär und $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Nach der Definition der Multiplikation von Matrizen ("Zeile mal Spalte") ergibt sich

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 42 & 49 & 10 & 2 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 12 & 15 & 3 & 1 \\ -38 & -45 & -9 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 87 (Übung)

a) Zeigen Sie, dass für $n, m \in \mathbb{N}$ durch die Abbildung

$$(\cdot|\cdot)_F : \mathbb{K}^{n\times m} \times \mathbb{K}^{n\times m} \to \mathbb{K}, \qquad ((a_{jk}),(b_{jk})) \mapsto \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{jk}\overline{b_{jk}}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^{n\times m}$ definiert wird (das sogenannte Frobenius-Skalarprodukt).

b) Sei $\ell^1 := \{(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty\}$. Zeigen Sie, dass durch $\|\cdot\|_1 : \ell^1 \to \mathbb{R}, (a_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ eine Norm auf ℓ^1 definiert wird. Weisen Sie nach, dass es kein Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$ auf ℓ^1 geben kann mit $(a|a) = \|a\|_1^2$ für alle $a = (a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Lösungsvorschlag

a) Seien $A = (a_{jk}), B = (b_{jk}), C = (c_{jk}) \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Es gilt

$$(A|B) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{jk}\overline{b_{jk}} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \overline{b_{jk}\overline{a_{jk}}} = \overline{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_{jk}\overline{a_{jk}}} = \overline{(B|A)}.$$

Zudem gilt

$$(\alpha A + B|C) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} (\alpha a_{jk} + b_{jk})\overline{c_{jk}} = \alpha \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{jk}\overline{c_{jk}} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_{jk}\overline{c_{jk}} = \alpha(A|C) + (B|C).$$

Schließlich gilt

$$(A|A) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{jk}\overline{a_{jk}} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} |a_{jk}|^2 \geqslant 0$$

und der Ausdruck ist genau dann 0, wenn alle $a_{jk} = 0$ sind, also A die Nullmatrix ist. Somit ist gezeigt, dass $(\cdot|\cdot)_F$ ein Skalarprodukt definiert.

b) Seien $a = (a_n), b = (b_n) \in \ell^1$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Es gilt

$$\|a\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \geqslant 0$$

und $\|a\|_1 = 0$ genau dann, wenn alle Folgenglieder 0 sind, also a die Nullfolge ist. Zudem gilt

$$\|\alpha a\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha||a_n| = |\alpha| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |\alpha|\,\|a\|_1.$$

Schließlich gilt

$$\|a+b\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \|a\|_1 + \|b\|_1,$$

wobei wir bei in den letzten beiden Rechnungen die bekannten Rechenregeln für die Konvergenz von Reihen benutzt haben. Damit die Norm von einem Skalarprodukt induziert sein kann, muss für je zwei beliebige Elemente aus ℓ^1 die Parallelogrammidentität erfüllt sein. Dies ist hier jedoch nicht der Fall, denn für $a = (1, 0, 0, \ldots)$ und $b = (0, 1, 0, 0, \ldots)$ in ℓ^1 gilt $a + b = (1, 1, 0, 0, \ldots)$, $a - b = (1, -1, 0, 0, \ldots)$ und somit

$$\|a+b\|_1^2 + \|a-b\|_1^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \neq 4 = 2(1^2 + 1^2) = 2(\|a\|_1^2 + \|b\|_1^2).$$