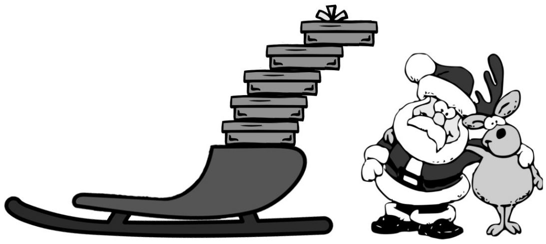
Der Weihnachtsmann braucht Ihre Hilfe!

Der Weihnachtsmann hat fünf Geschenkpakete auf seinen Schlitten gestapelt. Nach rasanter Fahrt haben sich die Pakete wie im nebenstehenden Bild nach hinten verschoben und sind beinahe vom Schlitten gekippt. Es scheint, als ob sich das oberste Geschenk sogar nicht einmal mehr über der Ladefläche befindet. Der Weihnachtsmann fragt sich, ob das tatsächlich zutreffen kann. Außerdem grübelt er, wie weit er wohl "'nach hinten bauen"' könnte, wenn er beliebig viele Geschenke zur Verfügung hätte. Können Sie dem Weihnachtsmann weiterhelfen?



Hinweis: Wir nehmen natürlich an, dass alle Pakete gleichartige, homogene, gleich ausgerichtete Quader sind und sich nur in Längsrichtung verschieben. Überlegen Sie sich, wie weit das oberste Paket über das zweitoberste hinausragen darf, wie weit die beiden obersten Pakete über das drittoberste hinausragen dürfen, und so weiter. Zeigen Sie anschließend induktiv, wie weit man mit einer festen, aber beliebigen Anzahl an Paketen maximal kommt.

Lösungsvorschlag

Das Vorgehen, um zu sehen, wie weit das oberste Geschenk über den Rand des Schlittens hinausragen kann, ist wiefolgt.

Schritt 1: Lege ein Geschenk auf den Schlitten und verschiebe es um x_1 nach hinten, sodass es gerade noch nicht runterfällt.
Schritt $n+1$ ($n \in \mathbb{N}$): Wenn n Geschenke so weit wie möglich nach hinten geschoben sind, lege ein $n+1$. Geschenk unter den Turm, bündig zum Ende des Schlittens (womit die n Geschenke weiterhin nicht runterfallen) und schiebe den kompletten Turm um x_{n+1} nach hinten, sodass er gerade noch nicht runterfällt.

Die Größe x_n ist dabei so groß, dass der Schwerpunkt des Turms über der Hinterkante des Schlittens liegt. Der Einfachheit halber setzen wir die Länge der Geschenke auf 1.

Bei einem Geschenk liegt der Schwerpunkt des ersten (und einzigen) Geschenks im Abstand $\frac{1}{2}$ von der vorderen Kante des ersten (und einzigen) Geschenks, also $x_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (der Abstand des Schwerpunkts des Turms addiert sich mit der maximal möglichen Verschiebung zur Geschenklänge 1).
Bei zwei Geschenken liegt der Schwerpunkt des ersten Geschenks im Abstand $\frac{1}{2} + x_1$ und derjenige des zweiten im Abstand von $\frac{1}{2}$ von der vorderen Kante des zweiten Geschenks. Der Schwerpunkt des Turms liegt im Abstand $1 - x_2$ von dieser Kante und berechnet sich durch

$$1 - x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + x_1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4},$$

also $x_2 = \frac{1}{4}$.
Bei drei Geschenken liegt der Schwerpunkt des ersten Geschenks im Abstand $\frac{1}{2} + x_1 + x_2$, der des zweiten Geschenks im Abstand $\frac{1}{2} + x_2$ und der des dritten Geschenks im Abstand $\frac{1}{2}$ von der vorderen Kante des dritten Geschenks. Der Schwerpunkt des Turms liegt im Abstand $1 - x_3$ von dieser Kante und berechnet sich durch

$$1 - x_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + x_1 + x_2 + \frac{1}{2} + x_2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6},$$

also $x_3 = \frac{1}{6}$.
Bei n Geschenken gilt für den Abstand des k. Geschenks zur vorderen Kante des n. Geschenks:

$k = 1$: $\frac{1}{2} + x_1 + \cdots + x_{n-1}$

$k = 2$: $\frac{1}{2} + x_2 + \cdots + x_{n-1}$

$\vdots$

$k = n-1$: $\frac{1}{2} + x_{n-1}$

$k = n$: $\frac{1}{2}$

Der Abstand des Turms zu dieser Kante ist $1 - x_n$ und gegeben durch

$$1 - x_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} + x_1 + \cdots + x_{n-1} + \frac{1}{2} + x_2 + \cdots + x_{n-1} + \cdots + \frac{1}{2} + x_{n-1} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{n}x_{n-1} + \cdots \frac{1}{n}x_1.$$

Mit $y_k := kx_k$ hat diese Gleichung die Form

$$y_n = \frac{n}{2} - y_1 - \cdots - y_{n-1}.$$

Mit der Information, dass $y_1 = \frac{1}{2}$ ist, folgt mit einer einfachen Induktion, dass $y_n = \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also

$$x_n = \frac{1}{2n}.$$

Der Abstand des hinteren Endes des Turmes von der Kante des Schlittens ist gegeben durch

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}.$$

Da die harmonische Reihe unbeschränkt ist, kann mit einer festen, aber beliebigen Anzahl an Geschenken ein beliebig großer Abstand erreicht werden. Für $n = 5$ ist dieser Abstand gegeben durch

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{n} = \frac{137}{120} > 1,$$

womit das oberste Geschenk sich tatsächlich nicht mehr über dem Schlitten befindet.
Hinweis: Tatsächlich ist $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}$ eine Obersumme der Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ auf $[1, n+1]$, womit gilt, dass

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{2}\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\log(n+1)}{2}.$$

Außerdem ist $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{n}$ eine Untersumme derselben Funktion auf $[1, n]$, womit

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2} + \int_1^{n}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1 + \log(n)}{2}.$$

Also liegt der maximale Abstand des hinteren Endes des Turms von der Kante des Schlittens im Intervall $[\frac{\log(n+1)}{2}, \frac{\log(n)+1}{2}]$.