Karlsruher Institut für Technologie

17. Oktober 2019
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Wahr oder falsch?)
Seien A, B und C Mengen. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

W F
☐ ☐ $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.

W F
☐ ☐ $A \subsetneqq \operatorname{Pot}(A)$.

W F
☐ ☐ $A \in \operatorname{Pot}(A)$.

W F
☐ ☐ $\operatorname{Pot}(A \times B) = \operatorname{Pot}(A) \times \operatorname{Pot}(B)$.

W F
☐ ☐ $(C \setminus A) \times (C \setminus B) = (C \times C) \setminus (A \times B)$.

W F
☐ ☐ $\emptyset \times A = \emptyset$.

W F
☐ ☐ $\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 2, 3, 3, 3\}$.

W F
☐ ☐ $\{1, 2, 3\} = \{\text{Eins}, \text{Zwei}, \text{Drei}\}$.

Aufgabe 2
Seien A, B und C logische Aussagen. Vereinfachen Sie die folgenden Aussagen.

a) $A \wedge [(C \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)]$

b) $A \wedge [\neg A \vee (B \wedge C) \vee (\neg C \vee \neg B) \wedge B]$

Aufgabe 3
Seien A und B logische Aussagen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind.

a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

b) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$.

c) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$.

d) $[(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)] \Leftrightarrow B$.

e) $[(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)] \Leftrightarrow \neg A$.

Aufgabe 4
Negieren Sie folgende Aussagen. Entscheiden Sie, ob die Aussage oder ihre Negation richtig ist.

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$.

b) $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \; \exists\, z \in \mathbb{R} : \; x \cdot z = y$.

c) Unter allen Rechtecken mit dem gleichen Umfang hat das Quadrat den größten Flächeninhalt.

d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in (0, \infty)$, die genügend groß sind, gilt $nx \leq x^n$.

Aufgabe 5

a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Menge $n\mathbb{Z}$ sei durch $n\mathbb{Z} = \{kn : k \in \mathbb{Z}\}$ definiert. Untersuchen Sie, welche der folgenden Relationen $\sim$ in der jeweiligen Menge X Äquivalenzrelationen sind. Falls $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, geben Sie die Äquivalenzklasse $[0]_\sim$ (in (i),(ii),(iii)) beziehungsweise $[(-3,5)]_\sim$ (in (iv)) an.

   (i) $X = \mathbb{N}$, $m \sim n \Leftrightarrow m$ ist durch n teilbar.

   (ii) $X = \mathbb{R}$, $x \sim y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = y + 2\pi k$.

   (iii) $X = n\mathbb{Z}$, $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in n\mathbb{Z}$.

   (iv) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $(z_1, n_1) \sim (z_2, n_2) \Leftrightarrow z_1 n_2 = z_2 n_1$.

b) Untersuchen Sie, ob in der Menge $X = \mathbb{R}^2$ die Relation $\prec$ definiert durch

$$(x_1, x_2) \prec (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \leq y_2$$

eine Ordnungsrelation ist.

Aufgabe 6

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. Falls die Funktion bijektiv ist, geben Sie die Umkehrfunktion an.

a) $f_1 : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + \sqrt{2}$.

b) $f_2 : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, $x \mapsto \frac{1}{1-x^3}$.

c) $f_3 : \mathbb{R} \to [0,1]$, $x \mapsto \frac{1}{1+|x|}$.

d) $f_4 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$.

Aufgabe 7

Es seien X, Y und Z Mengen sowie $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Sei $h : X \to Z$ durch $h = g \circ f$ gegeben. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) Sind f und g injektiv, so ist auch h injektiv.

b) Sind f und g surjektiv, so ist auch h surjektiv.

c) Ist h nicht surjektiv, so sind f und g nicht surjektiv.

d) Sind f und g bijektiv, so ist auch h bijektiv.

e) Ist h surjektiv, so ist auch g surjektiv.

f) Ist h surjektiv und g injektiv, so ist f surjektiv.

g) Ist h injektiv, so ist auch g injektiv.

h) Ist h surjektiv, so ist auch f surjektiv.

i) Ist h nicht injektiv, so sind f und g nicht injektiv.

Karlsruher Institut für Technologie

17. Oktober 2019
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Allgemeine Informationen

- Webseite der Vorlesung: http://www.math.kit.edu/iana3/lehre/hm1phys2019w
- Sprechzeiten von Dr. Schmoeger: Dienstag, 10–11 Uhr im Raum 2.046 (Geb. 20.30) oder nach Vereinbarung. E-Mail: christoph.schmoeger@kit.edu.
- Sprechzeiten von Andreas Geyer-Schulz: Mittwoch, 15:30–16:30 Uhr im Raum 2.037 (Geb. 20.30) oder nach Vereinbarung. E-Mail: geyer-schulz@kit.edu.

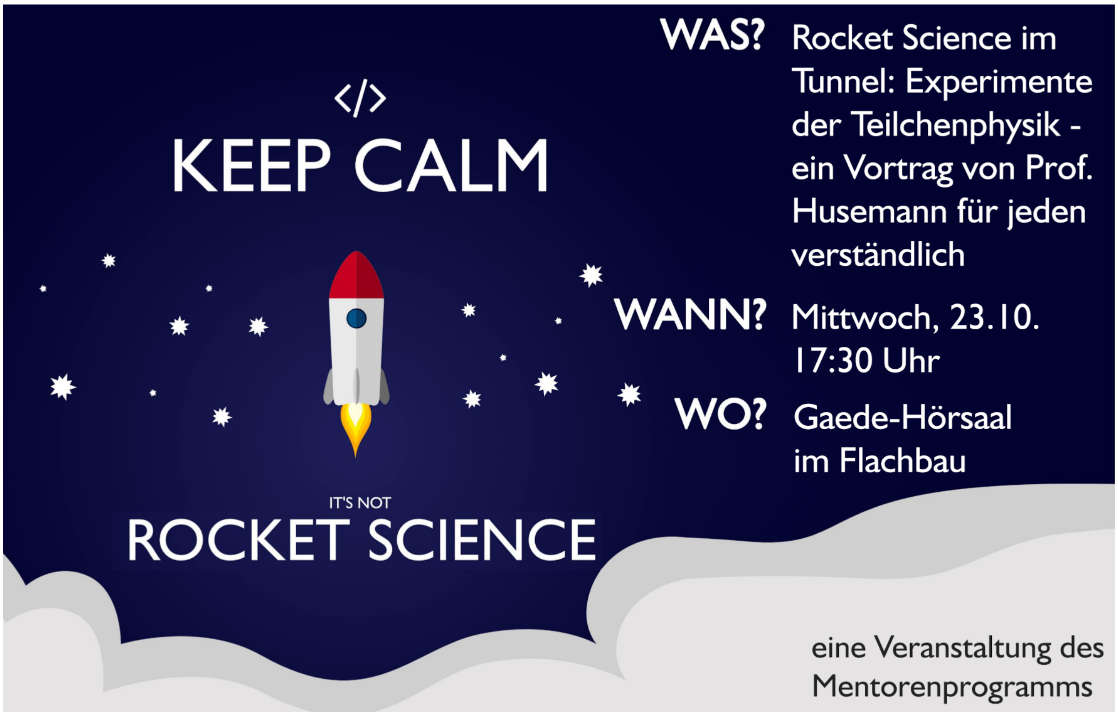
Übungsbetrieb

- Die Anmeldung für die Tutorien ist bis **Donnerstag, den 17. Oktober um 20 Uhr** unter https://www.redseat.de/kit-physik/ freigeschaltet.
- Jeden Donnerstag erscheint ein Übungsblatt auf der Webseite der Vorlesung. Die Übungsaufgaben werden teils in der Übung und teils in den Tutorien besprochen.

Prüfung

- Eine Probeklausur findet am Dienstag, den 28. Januar 2020 von 17:30 bis 19 Uhr im Gerthsen Hörsaal statt.
- Die Modulprüfung findet am 20. Februar 2020 statt.

Eine Information Ihrer Fachschaft.



https://fachschaft.physik.kit.edu/drupal/content/mentorenprogramm-ws-1920