Karlsruher Institut für Technologie

25. Oktober 2019
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschlag zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Wahr oder falsch?)

Seien A, B und C Mengen. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

W F
☐ ■ $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.

Um zu sehen, dass die Aussage falsch ist betrachten wir als Gegenbeispiel die Mengen $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ und $C = \{1, 2\}$. Dann gilt

$$C \setminus (A \cap B) = \{1, 2\} \neq \emptyset = \{1\} \cap \{2\} = (C \setminus A) \cap (C \setminus B).$$

Um zu einer richtigen Aussage zu gelangen, können wir etwa die linke Seite der Gleichung wie folgt umformen. Es gilt

$$\begin{aligned} x \in C \setminus (A \cap B) &\iff x \in C \wedge x \notin (A \cap B) \\ &\iff x \in C \wedge [x \notin A \vee x \notin B] \\ &\iff [x \in C \wedge x \notin A] \vee [x \in C \wedge x \notin B] \\ &\iff x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B). \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass für beliebige Mengen A, B und C die Aussage

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$$

richtig ist.

W F
☐ ■ $A \subsetneq \mathrm{Pot}(A)$.

Im Fall der leeren Menge $\emptyset$ gilt tatsächlich $\emptyset \subsetneq \{\emptyset\} = \mathrm{Pot}(\emptyset)$, da die leere Menge in jeder Menge enthalten ist. Wenn die Menge A nichtleer ist, dann ist die Aussage $A \subsetneq \mathrm{Pot}(A)$ falsch.

W F
■ ☐ $A \in \mathrm{Pot}(A)$.

Nach Definition gilt $\mathrm{Pot}(A) = \{M : M \subseteq A\}$. Da die Menge A die Eigenschaft $A \subseteq A$ erfüllt, gilt $A \in \mathrm{Pot}(A)$.

W F
☐ ■ $\mathrm{Pot}(A \times B) = \mathrm{Pot}(A) \times \mathrm{Pot}(B)$.

Setze $A = B = \emptyset$. Dann gilt

$$\mathrm{Pot}(A \times B) = \mathrm{Pot}(\emptyset) = \{\emptyset\} \neq \{\emptyset\} \times \{\emptyset\} = \mathrm{Pot}(\emptyset) \times \mathrm{Pot}(\emptyset) = \mathrm{Pot}(A) \times \mathrm{Pot}(B).$$

Somit ist die angegebene Aussage falsch.

W F
☐ ■ $(C \setminus A) \times (C \setminus B) = (C \times C) \setminus (A \times B)$.

Setze $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ und $C = \{1, 2\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (C \setminus A) \times (C \setminus B) &= \{2\} \times \{1\} \\ &= \{(2, 1)\} \\ &\neq \{(1, 1), (2, 1), (2, 2)\} \\ &= \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\} \setminus \{(1, 2)\} \\ &= (C \times C) \setminus (A \times B). \end{aligned}$$

Also ist die angegebene Aussage falsch. Wir wollen die linke Seite der Gleichung so umformen, dass wir eine richtige Aussage erhalten. Es gilt

$$\begin{aligned} x \in (C \setminus A) \times (C \setminus B) &\iff x = (y,z): \; y \in C \setminus A \wedge z \in C \setminus B \\ &\iff x = (y,z): \; [y \in C \wedge y \notin A] \wedge [z \in C \wedge z \notin B] \\ &\iff x \in C \times C \wedge [x \notin A \times C \wedge x \notin C \times B] \\ &\iff x \in (C \times C) \setminus ((A \times C) \cup (C \times B)). \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass für beliebige Mengen A, B und C die Gleichung

$$(C \setminus A) \times (C \setminus B) = (C \times C) \setminus ((A \times C) \cup (C \times B))$$

richtig ist.

W F
■ □ $\emptyset \times A = \emptyset$.

Nach Definition der Vorlesung gilt

$$\emptyset \times A = \{(x,y) : \; x \in \emptyset \wedge y \in A\}.$$

Da die Aussage $x \in \emptyset$ für jedes x falsch ist, gibt es kein (x,y) mit $(x,y) \in \emptyset \times A$. Daher folgt $\emptyset \times A = \emptyset$.

W F
■ □ $\{1,2,3\} = \{1,2,2,3,3,3\}$.

Wiederholungen von Elementen spielen in der Mengenschreibweise keine Rolle. Das tritt auch natürlicherweise auf, zum Beispiel gilt

$$\{k^2 : \; k \in \mathbb{N}, \; -2 \leq k \leq 2\} = \{4,1,0,1,4\} = \{0,1,4\}.$$

W F
□ □ $\{1,2,3\} = \{\text{Eins}, \text{Zwei}, \text{Drei}\}$.

Um zu entscheiden, ob eine Aussage wahr oder falsch ist, müssen alle Bestandteile der Aussage präzise definiert sein. Die Frage ist hier, ob man das Wort „Eins“ als natürliche Zahl mit der Bedeutung des Symbols 1 auffassen möchte oder nicht. Wenn man das so macht, dann sind die Mengen sicherlich gleich. Genausogut kann man den Standpunkt vertreten, dass das Wort „Eins“ als Zusammensetzung von Buchstaben und nicht als natürliche Zahl zu verstehen ist. Dann sind die Mengen natürlich nicht gleich. Solche Fragen der Notation müssen geklärt werden, bevor man über den Wahrheitsgehalt von Aussagen entscheiden kann.

Aufgabe 2

Seien A, B und C logische Aussagen. Vereinfachen Sie die folgenden Aussagen.

a) $A \wedge [(C \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)]$

b) $A \wedge [\neg A \vee (B \wedge C) \vee ((\neg C \vee \neg B) \wedge B)]$

Lösungsvorschlag. Im folgenden verwenden wir die Assoziativgesetze

$$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C) \quad \text{und} \quad (A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C). \tag{1}$$

und die Distributivgesetze

$$(A \vee B) \wedge C \Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \quad \text{und} \quad (A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C). \tag{2}$$

Außerdem verwenden wir dass die Aussage $A \vee \neg A$ immer wahr und die Aussage $A \wedge \neg A$ immer falsch ist. Für jede Aussage B folgt daraus

$$B \wedge (A \vee \neg A) \Leftrightarrow B \quad \text{und} \quad B \vee (A \wedge \neg A) \Leftrightarrow B. \tag{3}$$

a) Mit den obigen Regeln vereinfachen wir

$$\begin{aligned} A \wedge [(C \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)] &\overset{(1)}{\Leftrightarrow} A \wedge [((C \wedge \neg B) \vee B) \vee \neg A] \\ &\overset{(2)}{\Leftrightarrow} A \wedge [(C \wedge \neg B) \vee B] \vee (A \wedge \neg A) \\ &\overset{(3)}{\Leftrightarrow} A \wedge [(C \wedge \neg B) \vee B] \\ &\overset{(2)}{\Leftrightarrow} A \wedge [(C \vee B) \wedge (\neg B \vee B)] \\ &\overset{(3)}{\Leftrightarrow} A \wedge (C \vee B) \\ &\overset{(2)}{\Leftrightarrow} (A \wedge C) \vee (A \wedge B). \end{aligned}$$

b) Mit den obigen Regeln vereinfachen wir

$$\begin{aligned} &A \wedge [\neg A \vee (B \wedge C) \vee ((\neg C \vee \neg B) \wedge B)] \\ &\overset{(2)}{\Leftrightarrow} (A \wedge \neg A) \vee (A \wedge [(B \wedge C) \vee ((\neg C \vee \neg B) \wedge B)]) \\ &\overset{(3)}{\Leftrightarrow} A \wedge [(B \wedge C) \vee ((\neg C \vee \neg B) \wedge B)] \\ &\overset{(2)}{\Leftrightarrow} A \wedge [(B \wedge C) \vee (\neg C \wedge B) \vee (\neg B \wedge B)] \\ &\overset{(3)}{\Leftrightarrow} A \wedge [(B \wedge C) \vee (\neg C \wedge B)] \\ &\Leftrightarrow A \wedge B. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 3
Seien A und B logische Aussagen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind.

a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

b) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$.

c) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$.

d) $[(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)] \Leftrightarrow B$.

e) $[(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)] \Leftrightarrow \neg A$.

Lösungsvorschlag. Wir stellen in jedem Aufgabenteil die Wahrheitstafel auf.

a) Die Wahrheitstafel für die Aussage $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ lautet:

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Rightarrow B$	w	f	w	w
$\neg A$	f	f	w	w
$\neg B$	f	w	f	w
$\neg B \Rightarrow \neg A$	w	f	w	w
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$	w	w	w	w .

b) Die Wahrheitstafel für die Aussage $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ lautet:

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Rightarrow B$	w	f	w	w
$\neg B$	f	w	f	w
$A \wedge \neg B$	f	w	f	f
$\neg(A \wedge \neg B)$	w	f	w	w
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$	w	w	w	w .

c) Die Wahrheitstafel für die Aussage $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$ lautet:

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Leftrightarrow B$	w	f	f	w
$A \Rightarrow B$	w	f	w	w
$B \Rightarrow A$	w	w	f	w
$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	w	f	f	w
$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$	w	w	w	w .

d) Die Wahrheitstafel für die Aussage $[(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)] \Leftrightarrow B$ lautet:

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Rightarrow B$	w	f	w	w
$\neg A$	f	f	w	w
$\neg A \Rightarrow B$	w	w	w	f
$[(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)]$	w	f	w	f
$[(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)] \Leftrightarrow B$	w	w	w	w .

e) Die Wahrheitstafel für die Aussage $[(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)] \Leftrightarrow \neg A$ lautet:

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Rightarrow B$	w	f	w	w
$\neg B$	f	w	f	w
$A \Rightarrow \neg B$	f	w	w	w
$[(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)]$	f	f	w	w
$\neg A$	f	f	w	w
$[(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)] \Leftrightarrow \neg A$	w	w	w	w .

$\square$

Aufgabe 4
Negieren Sie folgende Aussagen. Entscheiden Sie, ob die Aussage oder ihre Negation richtig ist.

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$.

b) $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2\ \exists\, z \in \mathbb{R}:\ x \cdot z = y$.

c) Unter allen Rechtecken mit dem gleichen Umfang hat das Quadrat den größten Flächeninhalt.

d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in (0, \infty)$, die genügend groß sind, gilt $nx \leq x^n$.

Lösungsvorschlag.

a) Mit Quantoren kann man die Aussage in der Form

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, m \in \mathbb{N}:\ m \geq n$$

schreiben. Die Negation lautet:

$$\exists\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, m \in \mathbb{N}:\ m < n.$$

In Worten könnte man diese Aussage wie folgt ausdrücken: Es gibt $n \in \mathbb{N}$ so, dass jedes $m \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $m < n$ erfüllt. Offensichtlich ist die ursprüngliche Aussage wahr, denn man kann zu jedem $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $m = n$ wählen um die Ungleichung $m \geq n$ zu erfüllen.

b) Die Negation der Aussage lautet

$$\exists\,(x, y) \in \mathbb{R}^2\ \forall\, z \in \mathbb{R}:\ x \cdot z \neq y.$$

In Worten: Es gibt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ so, dass $x \cdot z \neq y$ für jedes $z \in \mathbb{R}$ gilt. In diesem Fall ist die Negation wahr, denn für $(x, y) = (0, 1)$ gilt $x \cdot y = 0 \neq 1 = y$ für alle $z \in \mathbb{R}$.

c) Die Negation der Aussage lautet: Es gibt ein Rechteck, das einen größeren Flächeninhalt besitzt als ein Quadrat mit dem gleichen Umfang. Um die Aussage formaler aufzuschreiben und schließlich zu entscheiden, ob sie wahr ist oder nicht, fixieren wir eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$. Wir betrachten Rechtecke mit den Seitenlängen $a, b \in \mathbb{R}$ die alle den gleichen Umfang $2(a + b) = c$ besitzen. Der Flächeninhalt eines solchen Rechtecks lautet ab. Das Quadrat mit Umfang c hat die Seitenlänge $\frac{c}{4}$ und den Flächeninhalt $\frac{c^2}{16} = \frac{(a+b)^2}{4}$. Die ursprüngliche Aussage lautet also:

$$\forall\,(a, b) \in [0, \infty)^2:\ ab \leq \frac{(a + b)^2}{4}.$$

Die Negation lautet:

$$\exists\,(a, b) \in [0, \infty)^2:\ ab > \frac{(a + b)^2}{4}.$$

Wir stellen fest, dass für alle $a, b \in [0, \infty)^2$ die Ungleichung $(a - b)^2 \geq 0$ gilt. Umformen dieser Ungleichung liefert $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$ und somit ist die Aussage über das Quadrat wahr.

d) Wir müssen zunächst die Ausdrucksweise „genügend groß“ formalisieren. Die ursprüngliche Aussage lautet dann:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, C \in (0,\infty)\ \forall\, x \in (C,\infty):\ nx \leq x^n.$$

Die Negation dieser Aussage ergibt sich dann zu

$$\exists\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, C \in (0,\infty)\ \exists\, x \in (C,\infty):\ nx > x^n.$$

Wir wollen zeigen, dass die ursprüngliche Aussage wahr ist. Dazu müssen wir zu beliebig vorgegebenem $n \in \mathbb{N}$ ein passendes $C > 0$ angeben, welches die Aussage erfüllt. Sei also $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen $C = n$. Im Fall $n = 1$ gilt die Ungleichung $nx = x \leq x = x^n$ für alle $x \geq 1$, die Aussage ist also in diesem Fall erfüllt. Im Fall $n \geq 2$ erhalten wir für alle $x \geq n = C$ die Ungleichung

$$nx \leq x^2 \leq x^n,$$

wobei wir für die erste Ungleichung die Eigenschaft $x \geq n$ und für die zweite Ungleichung die Eigenschaften $n \geq 2$ und $x \geq 1$ verwendet haben. Die Aussage ist also auch in diesem Fall erfüllt. Insgesamt haben wir also gezeigt, dass die Aussage wahr ist. $\square$

Aufgabe 5

a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Menge $n\mathbb{Z}$ sei durch $n\mathbb{Z} = \{kn :\ k \in \mathbb{Z}\}$ definiert. Untersuchen Sie, welche der folgenden Relationen $\sim$ in der jeweiligen Menge X Äquivalenzrelationen sind. Falls $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, geben Sie die Äquivalenzklasse $[0]_\sim$ (in (i),(ii),(iii)) beziehungsweise $[(-3,5)]_\sim$ (in (iv)) an.

(i) $X = \mathbb{N}$, $m \sim n \Leftrightarrow m$ ist durch n teilbar.

(ii) $X = \mathbb{R}$, $x \sim y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = y + 2\pi k$.

(iii) $X = n\mathbb{Z}$, $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in n\mathbb{Z}$.

(iv) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $(z_1, n_1) \sim (z_2, n_2) \Leftrightarrow z_1 n_2 = z_2 n_1$.

b) Untersuchen Sie, ob in der Menge $X = \mathbb{R}^2$ die Relation $\prec$ definiert durch

$$(x_1, x_2) \prec (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \leq y_2$$

eine Ordnungsrelation ist.

Lösungsvorschlag.

a) (i) Die angegebene Relation ist keine Äquivalenzrelation, da sie nicht symmetrisch ist. Zum Beispiel ist $6 \sim 2$, da $6 = 2 \cdot 3$ ist, aber es gilt nicht $2 \sim 6$, da kein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $2 = 6 \cdot k$.

(ii) Die angegebene Relation ist eine Äquivalenzrelation.

- *Reflexivität*: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x = x + 2\pi \cdot 0$ und somit $x \sim x$.

- *Transitivität*: Es seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$. Dann existieren $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $x = y + 2\pi k$ und $y = z + 2\pi l$. Somit ist $x = y + 2\pi(k + l)$, also $x \sim z$.
- *Symmetrie*: Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \sim y$. Dann existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $x = y + 2\pi k$. Folglich ist $y = x + 2\pi(-k)$ und $y \sim x$.

Es gilt $[0]_\sim = \{x \in \mathbb{R} : x \sim 0\} = \{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$.

(iii) Die angegebene Relation ist eine Äquivalenzrelation.

- *Reflexivität*: Für jedes $x \in n\mathbb{Z}$ gilt $x - x = 0 \in n\mathbb{Z}$ und somit $x \sim x$.
- *Transitivität*: Seien $x, y, z \in n\mathbb{Z}$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$. Dann gelten $x - y \in n\mathbb{Z}$ und $y - z \in n\mathbb{Z}$, folglich existieren $k, l \in Z$ mit $x = y + kn$ und $z = y + ln$. Es folgt $x - z = y + kn - y - ln = (k - l)n \in n\mathbb{Z}$. Daher gilt $x \sim z$.
- *Symmetrie*: Es seien $x, y \in n\mathbb{Z}$ mit $x \sim y$. Dann existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $x = y + kn$. Folglich ist $y = x - kn$ und $y \sim x$.

Es gilt $[0]_\sim = \{x \in n\mathbb{Z} : x \sim 0\} = n\mathbb{Z}$. In diesem Beispiel sind also alle Elemente äquivalent und es gibt nur eine Äquivalenzklasse.

(iv) Die angegebene Relation ist eine Äquivalenzrelation.

- *Reflexivität*: Für alle $(z_1, n_1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ gilt $z_1 n_1 = z_1 n_1$ und somit $(z_1, n_1) \sim (z_1, n_1)$.
- *Transitivität*: Es seien $(z_1, n_1), (z_2, n_2), (z_3, n_3) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ mit $(z_1, n_1) \sim (z_2, n_2)$ und $(z_2, n_2) \sim (z_3, n_3)$. Dann gilt $z_1 n_2 = z_2 n_1$ und $z_2 n_3 = z_3 n_2$ und damit $\frac{z_1}{n_1} = \frac{z_2}{n_2} = \frac{z_3}{n_3}$. Somit ist $(z_1, n_1) \sim (z_3, n_3)$.
- *Symmetrie*: Für alle $(z_1, n_1), (z_2, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ mit $(z_1, n_1) \sim (z_2, n_2)$ gilt $z_1 n_2 = z_2 n_1$. Hieraus folgt $z_2 n_1 = z_1 n_2$ und somit $(z_2, n_2) \sim (z_1, n_1)$.

Es gilt

$$[(-3, 5)]_\sim = \{(z, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : (z, n) \sim (-3, 5)\} = \left\{(z, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : \frac{z}{n} = -\frac{3}{5}\right\}.$$

b) Die angegebene Relation ist eine Ordnungsrelation.

- *Reflexivität*: Für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt $x_1 \leq x_1$ und $x_2 \leq x_2$ und somit $(x_1, x_2) \prec (x_1, x_2)$.
- *Transitivität*: Es seien $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, x_2) \prec (y_1, y_2)$ und $(y_1, y_2) \prec (z_1, z_2)$. Dann gilt $x_1 \leq y_1 \leq z_1$, $x_2 \leq y_2 \leq z_2$ und damit $x_1 \leq z_1$ sowie $x_2 \leq z_2$. Also $(x_1, x_2) \prec (z_1, z_2)$.
- *Antisymmetrie*: Es seien $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, x_2) \prec (y_1, y_2)$ und $(y_1, y_2) \prec (x_1, x_2)$. Dann gilt $x_1 \leq y_1$ und $y_1 \leq x_1$ sowie $x_2 \leq y_2$ und $y_2 \leq x_2$. Damit folgt $x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$, also $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. □

Aufgabe 6

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. Falls die Funktion bijektiv ist, geben Sie die Umkehrfunktion an.

a) $f_1 : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + \sqrt{2}$.

b) $f_2 : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $x \mapsto \frac{1}{1-x^3}$.

c) $f_3 : \mathbb{R} \to [0, 1]$, $x \mapsto \frac{1}{1+|x|}$.

d) $f_4 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$.

Lösungsvorschlag.

a) Für jedes $x \in Q$ ist $x + \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ und damit ist f_1 eine wohldefinierte Abbildung. Seien $x, y \in \mathbb{Q}$ mit $f_1(x) = f_1(y)$. Dann folgt $x + \sqrt{2} = y + \sqrt{2}$, also auch $x = y$. Daher ist f_1 injektiv. Um zu zeigen, dass f_1 nicht surjektiv ist, machen wir einen Widerspruchsbeweis. Angenommen f_1 wäre surjektiv. Dann existiert ein $x \in Q$ mit $f_1(x) = 2\sqrt{2}$. Es folgt daraus $x + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ und somit $x = \sqrt{2}$. Wir schreiben die rationale Zahl x als vollständig gekürzten Bruch $x = \frac{n}{m}$ mit teilerfremden Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$. Wir erhalten aus $x = \sqrt{2}$ die Gleichung $n = \sqrt{2}m$ und durch Quadrieren $n^2 = 2m^2$. Damit ist n^2 eine gerade Zahl, also auch n und daher gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k$. Die Gleichung $n^2 = 2m^2$ liefert somit $2k^2 = m^2$ und es folgt, dass auch m^2 und damit m eine gerade Zahl ist. Dies steht im Widerspruch zur Teilerfremdheit von m und n. Die Annahme, dass f_1 surjektiv ist, muss also verworfen werden. Wir haben also gezeigt, dass f_1 nicht surjektiv ist.

b) Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Dann ist $\frac{1}{1-x^3} \neq 0$ und $\frac{1}{1-x^3} \neq 1$. Somit ist f_2 eine wohldefinierte Abbildung. Seien $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ mit $f_2(x) = f_2(y)$. Aus $\frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{1-y^3}$ folgt $x^3 = y^3$ und weiter $x = y$. Also ist f_2 injektiv. Sei $y \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Die Gleichung $f_2(x) = y$ lautet $\frac{1}{1-x^3} = y$ und man kann sie nach x auflösen. Man erhält $x = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{y}}$. Also ist f_2 auch surjektiv und damit auch bijektiv. Die Umkehrfunktion $f_2^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ist durch $f_2^{-1}(y) = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{y}}$ für jedes $y \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ gegeben.

c) Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt $1 + |x| \geq 1$ und somit $\frac{1}{1+|x|} \leq 1$. Außerdem ist klar, dass $\frac{1}{1+|x|} \geq 0$ gilt. Also ist f_3 eine wohldefinierte Abbildung. Es gilt $f_3(1) = 1 = f_3(-1)$, daher ist f_3 nicht injektiv. Außerdem gibt es kein $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{1+|x|} = 0$. Also ist f_3 auch nicht surjektiv. Man kann zeigen, dass das Bild von f_3 durch $(0, 1]$ gegeben ist.

d) Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Es gilt $f_4(x) \neq 1$ und ferner

$$f_4(f_4(x)) = \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{\frac{x+1+x-1}{x-1}}{\frac{x+1-x+1}{x-1}} = \frac{2x}{2} = x.$$

Wir erhalten also $f_4 \circ f_4 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}\setminus\{1\}}$. Nach Satz 3.5 ist f_4 bijektiv und es gilt $f_4^{-1} = f_4$. □

Aufgabe 7

Es seien X, Y und Z Mengen sowie $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Sei $h : X \to Z$ durch $h = g \circ f$ gegeben. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) Sind f und g injektiv, so ist auch h injektiv.

b) Sind f und g surjektiv, so ist auch h surjektiv.

c) Ist h nicht surjektiv, so sind f und g nicht surjektiv.

d) Sind f und g bijektiv, so ist auch h bijektiv.

e) Ist h surjektiv, so ist auch g surjektiv.

f) Ist h surjektiv und g injektiv, so ist f surjektiv.

g) Ist h injektiv, so ist auch g injektiv.

h) Ist h surjektiv, so ist auch f surjektiv.

i) Ist h nicht injektiv, so sind f und g nicht injektiv.

Lösungsvorschlag.

a) Die Aussage ist wahr. Seien f und g injektiv. Seien $x, y \in X$ mit $g(f(x)) = h(x) = h(y) = g(f(y))$. Da g injektiv ist, folgt $f(x) = f(y)$ und da f injektiv ist folgt daraus wiederum $x = y$. Damit ist die Injektivität von h gezeigt.

b) Die Aussage ist wahr. Seien f und g surjektiv. Sei $z \in Z$. Da g surjektiv ist, gibt es ein $y \in Y$ mit $g(y) = z$. Da f surjektiv ist, gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Insgesamt ist damit $h(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ gezeigt. Also ist die Funktion h surjektiv.

c) Die Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir $X = Y = Z = \mathbb{N}$ und $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ sowie $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeben durch $g(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist g offensichtlich nicht surjektiv und es gilt $h = g \circ f = g$, also ist auch h nicht surjektiv. Allerdings ist f surjektiv, da die Identitätsfunktion auf jeder Menge bijektiv ist.

   Aus Teil b), der Kontraposition und den de Morgan-Regeln erhält man übrigens die richtige Aussage: Ist h nicht surjektiv, so sind f *oder* g nicht surjektiv.

d) Die Aussage ist wahr. Sie folgt direkt aus a) und b), da eine Funktion genau dann bijektiv ist, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

e) Die Aussage ist wahr. Sei h surjektiv. Wir müssen zeigen, dass g surjektiv ist. Sei dazu $z \in Z$. Da h surjektiv ist, gibt es ein $x \in X$ mit $h(x) = z$. Wegen $h(x) = g(f(x))$ gibt es also ein $y \in Y$, nämlich $y = f(x)$, welches $g(y) = z$ erfüllt. Damit ist gezeigt, dass g surjektiv ist.

f) Die Aussage ist wahr. Seien h surjektiv und g injektiv. Sei $y \in Y$. Da h surjektiv ist, existiert ein $x \in X$ mit $g(f(x)) = h(x) = g(y)$. Da g injektiv ist, folgt $f(x) = y$. Also ist f surjektiv.

g) Die Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir $X = Z = \{1\}$ und $Y = \mathbb{N}$ sowie die Funktionen $f : \{1\} \to \mathbb{N}$ gegeben durch $f(1) = 1$ und $g : \mathbb{N} \to \{1\}$ gegeben durch $g(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $h = \mathrm{id}_{\{1\}}$. Dann ist h injektiv, aber g ist nicht injektiv, da $g(1) = g(2)$ gilt.

h) Die Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel kann man die gleiche Situation wie in Teil g) betrachten.

i) Die Aussage ist falsch. Das Gegenbeispiel funktioniert wie in Teil b). □