Karlsruher Institut für Technologie

24. Oktober 2019
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

2. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Wahr oder falsch?)
Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ beschränkte, nichtleere Mengen. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

W	F	
☐	☐	$\sup X$ und $\inf X$ existieren.
☐	☐	$\inf X < \sup X$.
☐	☐	$\sup\{-x : x \in X\} = -\inf X$.
☐	☐	$\sup\{\lvert x\rvert : x \in X\} = \lvert\sup X\rvert$.
☐	☐	$\sup\{xy : x \in X, y \in Y\} = \sup X \sup Y$.
☐	☐	$\sup(X \cup Y) = \max\{\sup X, \sup Y\}$.
☐	☐	$\inf(X \cap Y) = \max\{\inf X, \inf Y\}$, falls $X \cap Y \neq \emptyset$.
☐	☐	$\forall x \in X : x > 0 \Rightarrow \inf X > 0$.
☐	☐	$\exists x \in X : x > 0 \Rightarrow \sup X > 0$.

Aufgabe 2
Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, die die folgende Bedingung erfüllen.

a) $|x+1| = |x-2|$.

b) $|x+2| > |x-3|$.

c) $|2 - |2-x|| \leq 1$.

d) $|x-4| > x^2$.

Aufgabe 3
Untersuchen Sie, ob das Supremum, Maximum, Infimum oder Minimum der folgenden Mengen existiert und bestimmen Sie diese Größen gegebenenfalls.

a) $A = \left\{(-1)^n(1-\frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\right\}$.

b) $B = \{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$.

c) $C = \left\{x + \frac{1}{x} : 0 < x \leq 17\right\}$.

d) $D = \left\{\frac{x^2}{1+x^2} : x \in \mathbb{R}\right\}$.

Aufgabe 4
Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie
$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1}y^k.$$

b) Wenn $x, y \geq 0$, dann gilt
$$x \leq y \iff x^n \leq y^n.$$

c) Zeigen Sie die binomische Formel
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Aufgabe 5
Zeigen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion.

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} k \right)^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ durch 13 teilbar.

d) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{-2} < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zusatz: Können Sie die Aussagen auch ohne vollständige Induktion beweisen?

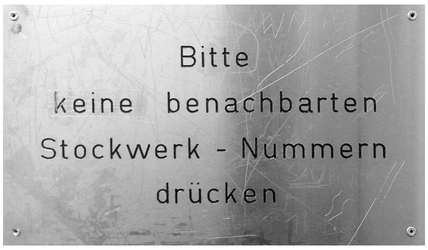
Aufgabe 6
Wir definieren die *Fibonacci-Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch die rekursive Vorschrift

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2.$$

Wir bezeichnen mit φ den *goldene Schnitt* $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

a) Zeigen Sie die *Formel von Binet* $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - (-\varphi)^{-n}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Im Aufzug vom Physikhochhaus gibt es ein Schild mit folgender Aufschrift.



Bitte
keine benachbarten
Stockwerk-Nummern
drücken

Zeigen Sie, dass in Hochhäusern mit n Stockwerken die Anzahl der möglichen Stockwerkswahlen in Abhängigkeit von n durch die Fibonacci-Folge gegeben ist, wenn der Aufzug im Erdgeschoß startet.

Aufgabe 7
Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $a_1, \ldots, a_n \in (0, \infty)$.

a) Zeigen Sie die Ungleichung zwischen dem *harmonischen* und dem *geometrischen* Mittel

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k^{-1} \right)^{-1} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} a_k \right)^{1/n}.$$

b) Zeigen Sie die Ungleichung zwischen dem *arithmetischen* und dem *quadratischen* Mittel

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2}.$$

Hinweis. $\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} (a_k - a_l)^2$.