Karlsruher Institut für Technologie

1. November 2019
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschlag zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Wahr oder falsch?)

Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ beschränkte, nichtleere Mengen. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

W F
■ □ $\sup X$ und $\inf X$ existieren.

Diese Aussage ist wahr nach dem Vollständigkeitsaxiom (A15) und der Folgerung 4.2.

W F
□ ■ $\inf X < \sup X$.

Diese Aussage ist falsch. Betrachte zum Beispiel $X = \{0\}$. Es gilt $\inf\{0\} = \sup\{0\}$.

W F
■ □ $\sup\{-x : x \in X\} = -\inf X$.

Diese Aussage wurde im Beweis von Folgerung 4.2 gezeigt.

W F
□ ■ $\sup\{|x| : x \in X\} = |\sup X|$.

Diese Aussage ist falsch, wie man am Beispiel $X = \{-1, 0\}$ sieht. Hier gilt $|\sup X| = 0$, aber $\sup\{|x| : x \in X\} = 1$.

Wenn man

$$\{|x| : x \in X\} = \{x : x \in X, x \geq 0\} \cup \{-x : x \in X, x \leq 0\}$$

schreibt, dann kann man aus dem dritten und sechsten Teil dieser Aufgabe, die wahre Aussage

$$\sup\{|x| : x \in X\} = \max\{|\sup X|, |\inf X|\}$$

kombinieren.

W F
□ ■ $\sup\{xy : x \in X, y \in Y\} = \sup X \sup Y$.

Um zu sehen, dass diese Aussage falsch ist, setzen wir $X = \{-1, 0\}$ und $Y = \{-1\}$. Dann gilt $\sup X = 0$ und $\sup Y = -1$, also $\sup X \sup Y = 0$. Andererseits gilt $\{xy : x \in X, y \in Y\} = \{1, 0\}$ und somit $\sup\{xy : x \in X, y \in Y\} = 1$.

W F
■ □ $\sup(X \cup Y) = \max\{\sup X, \sup Y\}$.

Diese Aussage ist wahr. Setze $\gamma = \max\{\sup X, \sup Y\}$. Für alle $x \in X$ gilt $x \leq \sup X \leq \gamma$ und für alle $x \in Y$ gilt ebenfalls $x \leq \sup Y \leq \gamma$. Somit haben wir $x \leq \gamma$ für alle $x \in X \cup Y$ gezeigt, d.h., γ ist eine obere Schranke von $X \cup Y$. Sei $\tilde{\gamma}$ eine obere Schranke von $X \cup Y$. Für alle $x \in X$ gilt $x \leq \tilde{\gamma}$ und für alle $x \in Y$ gilt $x \leq \tilde{\gamma}$. Daher ist $\tilde{\gamma} \geq \sup X$ und $\tilde{\gamma} \geq \sup Y$. Also insgesamt $\tilde{\gamma} \geq \max\{\sup X, \sup Y\}$. Es folgt die Behauptung.

W F
□ ■ $\inf(X \cap Y) = \max\{\inf X, \inf Y\}$, falls $X \cap Y \neq \emptyset$.

Diese Aussage ist falsch, wie man am Beispiel $X = \{0, 2\}$ und $Y = \{1, 2\}$ sieht. In diesem Beispiel gilt $\inf(X \cap Y) = \inf\{2\} = 2$ und $\max\{\inf X, \inf Y\} = \max\{0, 1\} = 1$. Man kann zeigen, dass in dieser Situation die Aussage $\inf(X \cap Y) \geq \max\{\inf X, \inf Y\}$ immer richtig ist.

W F
□ ■ $\forall\, x \in X : \; x > 0 \Rightarrow \inf X > 0$.

Diese Aussage ist falsch, denn es gelten $\inf(0,1) = 0$ und $x > 0$ für alle $x \in (0,1)$.

W F
■ □ $\exists\, x \in X : \; x > 0 \Rightarrow \sup X > 0$.

Wir beweisen die Aussage mit dem Prinzip der Kontraposition. Es gelte also $\sup X \leq 0$. Dann ist nach Definition des Supremums 0 eine obere Schranke von X. Dies bedeutet, dass $x \leq 0$ für alle $x \in X$ gilt. Wir haben also die Aussage

$$\sup X \leq 0 \Rightarrow \forall\, x \in X : \; x \leq 0$$

gezeigt. Nach Aufgabe 3a), Blatt 1 ist dies äquivalent zu der hier behaupteten Aussage.

Aufgabe 2
Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, die die folgende Bedingung erfüllen.

a) $|x+1| = |x-2|$.

b) $|x+2| > |x-3|$.

c) $\big|2 - |2-x|\big| \leq 1$.

d) $|x-4| > x^2$.

Lösungsvorschlag. Sei $x \in \mathbb{R}$.

a) Es gilt

$$\begin{aligned}
|x+1| = |x-2| &\iff (x+1)^2 = (x-2)^2 \\
&\iff x^2 + 2x + 1 = x^2 - 4x + 4 \\
&\iff 6x = 3 \\
&\iff x = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

b) Es gilt mit ähnlicher Rechnung wie in Teil a)

$$|x+2| > |x-3| \iff x^2 + 4x + 4 > x^2 - 6x + 9 \iff x > \frac{1}{2}.$$

c) Es gilt

$$\big|2 - |2-x|\big| \leq 1 \iff 1 \leq |2-x| \leq 3.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle. Falls $x \leq 2$, gilt $|2-x| = 2-x$ und somit

$$1 \leq 2 - x \leq 3 \iff -1 \leq x \leq 1.$$

Der zweite Fall ist $x \geq 2$. Dann gilt $|2-x| = x-2$ und es folgt

$$1 \leq x - 2 \leq 3 \iff 3 \leq x \leq 5.$$

Insgesamt haben wir gezeigt

$$\big|2 - |2-x|\big| \leq 1 \iff x \in [-1,1] \cup [3,5].$$

d) Wir machen wieder eine Fallunterscheidung. Falls $x \geq 4$ gilt $|x-4| = x-4$. Wir haben

$$x - 4 > x^2 \iff 0 > x^2 - x + 4 = \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{15}{4}$$

und wir erkennen, dass in diesem Fall kein x die Bedingung erfällt, da der Ausdruck auf der rechten Seite strikt positiv ist. Im zweiten Fall betrachten wir $x \leq 4$ und somit $|x-4| = 4-x$. Hier gilt

$$4 - x > x^2 \iff 0 > x^2 + x - 4 = \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{17}{4} \iff -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{17}}{2} < x < -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{17}}{2}.$$

Es folgt daher

$$|x-4| > x^2 \iff x \in \left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{17}}{2}, -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{17}}{2}\right). \qquad \square$$

Aufgabe 3
Untersuchen Sie, ob das Supremum, Maximum, Infimum oder Minimum der folgenden Mengen existiert und bestimmen Sie diese Größen gegebenenfalls.

a) $A = \left\{(-1)^n(1 - \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\right\}$.

b) $B = \{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$.

c) $C = \left\{x + \frac{1}{x} : 0 < x \leq 17\right\}$.

d) $D = \left\{\frac{x^2}{1+x^2} : x \in \mathbb{R}\right\}$.

Lösungsvorschlag.

a) Wir zeigen, dass $\sup A = 1$ gilt und dass $\max A$ nicht existiert. Analog zeigt man, dass $\inf A = -1$ gilt und $\min A$ nicht existiert. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $(-1)^n(1 - \frac{1}{n}) \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$. Somit ist 1 eine obere Schranke und $1 \notin A$. Wir nehmen an, dass $\tilde{\gamma}$ eine obere Schranke von A mit $\tilde{\gamma} < 1$ wäre. Daraus folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit n gerade die Ungleichung $1 - \frac{1}{n} \leq \tilde{\gamma}$, also $\frac{1}{1-\tilde{\gamma}} \geq n$. Dies steht im Widerspruch zur Unbeschränktheit von $\mathbb{N}$, also ist die Annahme falsch. Daher ist 1 das Supremum von A. Da wir schon $1 \notin A$ festgestellt haben, hat A kein Maximum.

b) Wir zeigen zunächst $\min B = \frac{7}{4}$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}.$$

Setzt man $x = \frac{1}{2}$, so folgt einerseits, dass $\frac{7}{4}$ in A liegt. Andererseits sehen wir $x^2 - x + 2 \geq \frac{7}{4}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Damit ist $\inf B = \min B = \frac{7}{4}$ gezeigt.

Nun zeigen wir, dass A nach oben unbeschränkt ist. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Dann ist $n^2 - n + 2 \in B$ und wir erhalten

$$n^2 - n + 2 \geq n(n-1) \geq n.$$

Somit ist B nach oben unbeschränkt.

c) Wir zeigen zunächst $\min C = 2$. Setzt man $x = 1$ so erhält man $2 \in C$. Ferner erhalten wir für alle $x \in (0, 17]$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} + 2 \geq 2.$$

Also folgt direkt $\inf C = \min C = 2$.

Nun zeigen wir, dass C nach oben unbeschränkt ist. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen $x = \frac{1}{n}$. Dann ist $x + \frac{1}{x} \in C$ und es gilt

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1}{n} + n \geq n.$$

Da $\mathbb{N}$ nach oben unbeschränkt ist, ist auch C nach oben unbeschränkt.

d) Mit $x = 1$ sieht man $0 \in D$. Außerdem gilt offenbar $x^2(1+x^2)^{-1} \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also folgt direkt $\inf D = \min D = 0$. Es gilt $\min D = 0$.

Wir zeigen nun $\sup D = 1$. Die Menge D ist nach oben durch 1 beschränkt, denn wegen $1 + x^2 > 0$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzung

$$\frac{x^2}{1+x^2} < \frac{1+x^2}{1+x^2} = 1.$$

Also ist 1 eine obere Schranke von D und es gilt $1 \notin D$. Es bleibt zu zeigen, dass 1 die kleinste obere Schranke von D ist. Sei $\gamma < 1$ beliebig. Dann gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 > \frac{\gamma}{1-\gamma}$. Diese Ungleichung ist äquivalent zu $\frac{x^2}{1+x^2} > \gamma$. Also ist γ keine obere Schranke von D. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Aufgabe 4

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie

$$x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} y^k.$$

b) Wenn $x, y \geq 0$, dann gilt

$$x \leq y \iff x^n \leq y^n.$$

c) Zeigen Sie die binomische Formel

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Lösungsvorschlag.

a) Das Argument in der folgenden Rechnung nennt man Teleskopsummenargument. Wir berechnen

$$\begin{aligned}(x-y)\sum_{k=0}^{n-1}x^{n-k-1}y^k &= x\sum_{k=0}^{n-1}x^{n-k-1}y^k - y\sum_{k=0}^{n-1}x^{n-k-1}y^k\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}x^{n-k}y^k - \sum_{k=0}^{n-1}x^{n-k-1}y^{k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}x^{n-k}y^k - \sum_{k=1}^{n}x^{n-k}y^k\\ &= x^n + \sum_{k=1}^{n-1}x^{n-k}y^k - \sum_{k=1}^{n-1}x^{n-k}y^k - y^n\\ &= x^n - y^n,\end{aligned}$$

wobei wir im dritten Schritt eine Indexverschiebung durchgeführt haben.

b) In Teil a) haben wir die Gleichung

$$C(x-y) = x^n - y^n$$

gezeigt, wobei $C = \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1}y^k$ wegen $x \geq 0$ und $y \geq 0$ eine nichtnegative Zahl ist. Wir erhalten folglich

$$x \leq y \iff x-y \leq 0 \iff C(x-y) \leq 0 \iff x^n - y^n \leq 0 \iff x^n \leq y^n.$$

c) Im Fall $n = 0$ gilt $(x+y)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}x^k y^{n-k}$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass die Aussage

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

gilt. Wir berechnen außerdem

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\\ &= \frac{(n-k+1)n! + kn!}{k!(n-k+1)!}\\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\\ &= \binom{n+1}{k}\end{aligned}$$

für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$. Mit der Induktionsannahme, einer Indexverschiebung und obiger Formel erhalten wir

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
&= (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^{n-k+1}y^k \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]x^{n-k+1}y^k + y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k.
\end{aligned}$$

Aus dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung. □

Aufgabe 5

Zeigen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion.

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right)^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ durch 13 teilbar.

d) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{-2} < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zusatz: Können Sie die Aussagen auch ohne vollständige Induktion beweisen?

Lösungsvorschlag.

a) Wir betrachten $n = 1$ und erhalten die wahre Aussage

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}.$$

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass die Aussage

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

gilt. Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Aus dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

b) Falls $n = 1$ sehen wir, dass die Aussage

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = \left(\sum_{k=1}^{1} k\right)^2$$

richtig ist. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass die Aussage

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

gilt. Damit und mit der aus der Vorlesung bekannten Formel $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ berechnen wir

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k + (n+1)\right)^2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + 2(n+1)\sum_{k=1}^{n} k + (n+1)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + n(n+1)^2 + (n+1)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} k^3.\end{aligned}$$

Aus dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

c) Für den Induktionsanfang stellen wir fest, dass $4^3 + 3^2 = 91 = 7 \cdot 13$ gilt. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass die Zahl $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ durch 13 teilbar ist. Folglich existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $4^{2n+1} + 3^{n+2} = 13k$. Wir berechnen

$$4^{2(n+1)+1} + 3^{n+1+2} = 16 \cdot 4^{2n+1} + 3 \cdot 3^{n+2} = 13 \cdot 4^{2n+1} + 3\big(4^{2n+1} + 3^{n+2}\big) = 13\big(4^{2n+1} + 3k\big).$$

Offensichtlich ist diese Zahl durch 13 teilbar, sodass die Behauptung aus dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt.

d) Wenn man versucht, die angegebene Aussage mit vollständiger Induktion zu beweisen, wird man vermutlich nicht direkt zum Ziel kommen. Man kann nämlich aus der Induktionsannahme keine sinnvolle Information für den Induktionsschritt verwenden. Der Trick besteht darin, dass man stattdessen versucht, eine schärfere Ungleichung zu beweisen. Dies scheint zwar im ersten Moment schwieriger zu sein, allerdings führt es hier deshalb zum Ziel, weil man bei einer schärferen Aussage auch im Induktionsschritt eine stärkere Voraussetzung aus der Induktionsannahme verwenden kann. Konkret zeigen wir im Folgenden, dass sogar

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-2} \leq 2 - \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt. Der Beweis ist nun nicht schwer. Im Fall $n = 1$ erhalten wir die wahre Aussage $\sum\limits_{k=1}^{1} k^{-2} = 1 \leq 2 - \frac{1}{1}$. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und wir nehmen an, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

gilt. Wir berechnen mit dieser Annahme

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^{-2} = \sum_{k=1}^{n} k^{-2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}.$$

Im letzten Schritt haben wir verwendet, dass

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

gilt. Aus dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt nun die Behauptung. $\square$

Aufgabe 6

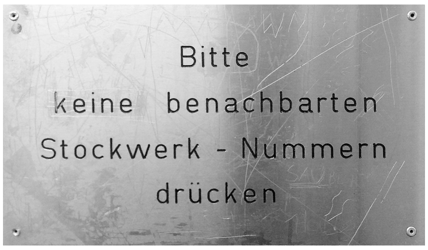
Wir definieren die *Fibonacci-Folge* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ durch die rekursive Vorschrift

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2.$$

Wir bezeichnen mit φ den *goldene Schnitt* $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

a) Zeigen Sie die *Formel von Binet* $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - (-\varphi)^{-n}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Im Aufzug vom Physikhochhaus gibt es ein Schild mit folgender Aufschrift.



Bitte
keine benachbarten
Stockwerk-Nummern
drücken

Zeigen Sie, dass in Hochhäusern mit n Stockwerken die Anzahl der möglichen Stockwerkswahlen in Abhängigkeit von n durch die Fibonacci-Folge gegeben ist, wenn der Aufzug im Erdgeschoß startet.

Lösungsvorschlag.

a) Wir verwenden im Folgenden die Gleichung $(-\varphi)^{-1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Da wir im Induktionsschritt die Rekursionsformel verwenden werden und in dieser die zwei vorhergehenden Folgenglieder auftreten, müssen wir hier die Formel für die ersten beiden Folgenglieder nachrechnen. Es gilt

$$a_0 = 0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^0 - (-\varphi)^0\right).$$

und

$$a_1 = 1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{(1+\sqrt{5}) - (1-\sqrt{5})}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^1 - (-\varphi)^{-1} \right).$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Wir nehmen an, dass die Formel für a_{n-2} und a_{n-1} korrekt sind. Wir stellen fest, dass φ und $(-\varphi)^{-1}$ die beiden Lösungen der Gleichung $x^2 = 1 + x$ sind. Folglich gilt

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-2} + a_{n-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^{n-2} - (-\varphi)^{-n+2}) + \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^{n-1} - (-\varphi)^{-n+1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \Big(\varphi^{n-2}(1+\varphi) - (-\varphi)^{-n+2}(1 + (-\varphi)^{-1}) \Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - (-\varphi)^{-n}). \end{aligned}$$

b) Die Stockwerke ab dem Erdgeschoß seien mit $1, \dots, n$ bezeichnet. Für $n = 1$ gibt es zwei Möglichkeiten: gar nicht oder $\{1\}$ zu drücken. Für $n = 2$ kann man, gar nicht, $\{1\}$ oder $\{2\}$ drücken, gemäß dem Schild ist aber $\{1, 2\}$ verboten. Für $n = 3$ erhält man entsprechend die fünf Möglichkeiten gar nicht, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ oder $\{1, 3\}$, da 1 und 3 nicht benachbart sind. Angenommen wir wüssten die gesuchten Zahlen A_{n-2} und A_{n-1} für $n-2$ bzw. $n-1$ Stockwerke wobei $n \in \mathbb{N}$ größer als 2 ist. Man erhält alle zulässigen Kombinationen für n Stockwerke, wenn man entweder eine Kombination für $n-1$ Stockwerke wählt und n nicht drückt oder wenn man eine Kombination für $n-2$ Stockwerke wählt und zusätzlich n drückt. Damit folgt die Rekursionsformel $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$. Aufgrund der Anfangswerte erhalten wir $A_n = a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$.

Aufgabe 7
Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $a_1, \dots, a_n \in (0, \infty)$.

a) Zeigen Sie die Ungleichung zwischen dem *harmonischen* und dem *geometrischen* Mittel

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k^{-1} \right)^{-1} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} a_k \right)^{1/n}.$$

b) Zeigen Sie die Ungleichung zwischen dem *arithmetischen* und dem *quadratischen* Mittel

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2}.$$

Hinweis. $\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} (a_k - a_l)^2$.

Lösungsvorschlag.

a) Wir definieren $b_k = (a_k)^{-1}$ für $k \in \{1, \dots, n\}$. Wegen $a_k \in (0, \infty)$ gilt auch $b_k \in (0, \infty)$ für $k \in \{1, \dots, n\}$. Wir können daher die arithmetisch-geometrische

Mittelungleichung aus der Vorlesung auf die Zahlen $b_1, \dots, b_n$ anwenden und erhalten die Ungleichung

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{-1/n} = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k^{-1}\right)^{1/n} = \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/n} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^{-1}.$$

Aus dieser Ungleichung folgt die Behauptung durch Kehrwertbildung.

b) Wir berechnen

$$\begin{aligned} 0 &\le \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(a_k - a_l)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_k a_l + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_l^2 \\ &= 2n\sum_{k=1}^{n} a_k^2 - 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2. \end{aligned}$$

Durch Teilen dieser Ungleichung durch $2n^2$ und Umstellen der Terme erhalten wir daraus die Ungleichung

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

Die Behauptung folgt nun durch Wurzelziehen. $\square$