Karlsruher Institut für Technologie

31. Oktober 2019
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

3. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Wahr oder falsch?)
Wir betrachten die Folgen (a_n), (b_n), (c_n) und (d_n). Es sei (a_n) konvergent, (b_n) beschränkt, (c_n) divergent und (d_n) eine Nullfolge. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

W F

a) ☐ ☐ (a_n) ist beschränkt.

b) ☐ ☐ (a_n^{-1}) konvergiert.

c) ☐ ☐ $(b_n a_n)$ konvergiert.

d) ☐ ☐ $(b_n c_n)$ divergiert.

e) ☐ ☐ $(b_n d_n)$ konvergiert.

f) ☐ ☐ (d_n^n) konvergiert.

g) ☐ ☐ (c_{2n}) konvergiert $\Rightarrow$ (c_{2n+1}) divergiert.

h) ☐ ☐ (b_{2n}), (b_{2n+1}), (b_{3n}) konvergieren $\Rightarrow$ (b_n) konvergiert.

i) ☐ ☐ $\exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, n_0 \in \mathbb{N}\ \exists\, n \geq n_0 :$ $|c_n - c_{n+1}| > \varepsilon$.

Aufgabe 2

a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $z = |z|$? Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $z^2 = |z|^2$?

b) Skizzieren Sie die Mengen

(i) $D_0 = \{z \in \mathbb{C} :\ 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$,

(ii) $D_1 = \{-z :\ z \in D_0\}$,

(iii) $D_2 = \{\mathrm{i}z :\ z \in D_0\}$,

(iv) $D_3 = \{z^2 :\ z \in D_0\}$,

(v) $D_4 = \{z^{-1} :\ z \in D_0\}$,

(vi) $C_1 = \{z \in \mathbb{C} :\ |z - 3 - \mathrm{i}| < 1 \text{ und } |z - 2 + \mathrm{i}| \leq 2\}$,

(vii) $C_2 = \left\{z \in \mathbb{C} :\ |z + \mathrm{i}| + |z - \mathrm{i}| = \frac{10}{3}\right\}$.

c) Sei p ein reelles Polynom und $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p. Zeigen Sie, dass dann auch $\overline{z}$ eine Nullstelle von p ist.

d) Das Polynom p ist durch

$$p(z) = z^4 + (1 + \mathrm{i})z^3 + (6 + \mathrm{i})z^2 + 6z, \quad z \in \mathbb{C}$$

gegeben. Zerlegen Sie p in Linearfaktoren.

Aufgabe 3
Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$. Dann divergiert die Folge (z^n).

b) Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$. Dann ist die Folge (z^n) genau dann konvergent, wenn $z = 1$.

c) Sei p ein Polynom (über $\mathbb{C}$). Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|p(n)|} = 1$.

d) Seien $k \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{z^n} = 0$.

Aufgabe 4
Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen (a_n) auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

a) $a_n = \dfrac{6n^2 + 3n - 4}{1 + n^2}$.

b) $a_n = \dfrac{1}{n^4} \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} k$.

c) $a_n = \sqrt{9n^2 + 2n + 1} - 3n$.

d) $a_n = \left(\dfrac{3 + 4\mathrm{i}}{5}\right)^n$.

e) $a_n = \dfrac{(n+2)^{42} - n^{42}}{n^{41}}$.

f) $a_n = \dfrac{1 + n^3 - 2n^4}{n3^n - 4n^2}$.

g) $a_n = \left(\dfrac{1}{2^n} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \dfrac{1}{3^{n+k}}\right)^{1/n}$.

h) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$.

i) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

j) $a_n = \sqrt[n]{n!}$.

k) $a_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right)$.

l) $a_n = \sqrt[n]{x^n + y^n + z^n},\ x, y, z \geq 0$.

Aufgabe 5
Sei $c > 0$. Sei $a_1 > 0$. Wir definieren die Folge (a_n) durch die rekursive Vorschrift $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{c}$ gilt.

b) Wir setzen $r_n = a_n - \sqrt{c}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $r_n \geq 0$ und $r_{n+1} \leq \frac{r_n^2}{2\sqrt{c}}$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.