Karlsruher Institut für Technologie

8. November 2019
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschlag zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 1

Wir betrachten die Folgen (a_n), (b_n), (c_n) und (d_n). Es sei (a_n) konvergent, (b_n) beschränkt, (c_n) divergent und (d_n) eine Nullfolge.

Lösungsvorschlag.

W F
■ □ (a_n) ist beschränkt.

Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Wähle $\varepsilon = 1$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$. Aus der Dreiecksungleichung folgt daher $|a_n| \leq 1 + |a|$ für alle für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$. Also ist $C = \max(\{|a_n| : 0 \leq n \leq n_0\} \cup \{|a| + 1\})$ eine obere Schranke für die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Also ist die Folge (a_n) beschränkt.

W F
□ ■ (a_n^{-1}) konvergiert.

Die Aussage ist falsch, wenn (a_n) eine Nullfolge ist. Wenn (a_n) nicht gegen 0 konvergiert, dann kann man Satz 6.2 (4) anwenden.

W F
□ ■ $(b_n a_n)$ konvergiert.

Die Aussage ist falsch. Setze dazu $a_n = 1$ und $b_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist (a_n) konvergent, (b_n) beschränkt aber $(b_n a_n)$ divergent.

W F
□ ■ $(b_n c_n)$ divergiert.

Die Aussage ist falsch. Setze $b_n = c_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist (b_n) beschränkt, (c_n) divergiert aber $(b_n c_n)$ ist eine konstante Folge, die konvergiert.

W F
■ □ $(b_n d_n)$ konvergiert.

Die Aussage ist richtig. Sei $\varepsilon > 0$. Da (b_n) beschränkt ist, können wir ein $C > 0$ wählen, welches $\sup\{|b_n| : n \in \mathbb{N}\} \leq C$ erfüllt. Da (d_n) eine Nullfolge ist, können wir außerdem ein $n_0 \in \mathbb{N}$ wählen, so dass $|d_n| \leq \frac{\varepsilon}{C}$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Es folgt daraus

$$|b_n d_n| = |b_n|\,|d_n| \leq C\,|d_n| \leq \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$. Somit ist die Folge $(b_n d_n)$ eine Nullfolge.

W F
■ □ (d_n^n) konvergiert.

Die Aussage ist wahr. Für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|d_n| \leq 1$, da (d_n) eine Nullfolge ist. Also gilt auch

$$0 \leq |d_n^n| = |d_n|^n \leq |d_n|$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Aus dem Sandwichkriterium folgt, dass (d_n^n) eine Nullfolge ist.

W F
□ ■ (c_{2n}) konvergiert $\Rightarrow$ (c_{2n+1}) divergiert.

Die Aussage ist falsch. Setze dazu $c_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die Teilfolgen (c_{2n}) und (c_{2n+1}) jeweils konstant und somit konvergent, obwohl die Folge (c_n) divergiert.

W F
■ □ (b_{2n}), (b_{2n+1}), (b_{3n}) konvergieren $\Rightarrow$ (b_n) konvergiert.

Die Aussage ist richtig. Seien $b = \lim_{n\to\infty} b_{2n}$ und $\tilde{b} = \lim_{n\to\infty} b_{2n+1}$. Wenn wir $b = \tilde{b}$ zeigen können, dann folgt die Behauptung aus Satz 6.5. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|b_{2n} - b| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, $|b_{2n+1} - \tilde{b}| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ und $|b_{3n} - b_{3m}| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $n, m \geq n_0$. Es folgt

$$|b - \tilde{b}| \leq |b - b_{6n}| + |b_{6n} - b_{6n+3}| + |b_{6n+3} - \tilde{b}| \leq \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $b = \tilde{b}$ und damit die Behauptung.

W F
□ ■ $\exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, n_0 \in \mathbb{N}\ \exists\, n \geq n_0 :\ |c_n - c_{n+1}| > \varepsilon.$

Die Aussage ist falsch. Setze dazu

$$(c_n) = \Big(1, \frac{3}{2}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 3, \frac{13}{4}, \frac{14}{4}, \frac{15}{4}, 4, \frac{21}{5}, \frac{22}{5}, \frac{23}{5}, \frac{24}{5}, 5 \ldots\Big),$$

wobei die Zahl $\frac{1}{n}$ stets n-mal auf das vorherige Folgenglied addiert wird. Da die unbeschränkte Folge (n) eine Teilfolge von (c_n) ist, ist (c_n) divergent. Allerdings findet man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|c_n - c_{n+1}| \leq \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$. □

Aufgabe 2

a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $z = |z|$? Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $z^2 = |z|^2$?

b) Skizzieren Sie die Mengen

(i) $D_0 = \{z \in \mathbb{C} :\ 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$,

(ii) $D_1 = \{-z :\ z \in D_0\}$,

(iii) $D_2 = \{\mathrm{i}z :\ z \in D_0\}$,

(iv) $D_3 = \{z^2 :\ z \in D_0\}$,

(v) $D_4 = \{z^{-1} :\ z \in D_0\}$,

(vi) $C_1 = \{z \in \mathbb{C} :\ |z - 3 - \mathrm{i}| < 1 \text{ und } |z - 2 + \mathrm{i}| \leq 2\}$,

(vii) $C_2 = \Big\{z \in \mathbb{C} :\ |z + \mathrm{i}| + |z - \mathrm{i}| = \frac{10}{3}\Big\}$.

c) Sei p ein reelles Polynom und $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p. Zeigen Sie, dass dann auch $\overline{z}$ eine Nullstelle von p ist.

d) Das Polynom p ist durch

$$p(z) = z^4 + (1 + \mathrm{i})z^3 + (6 + \mathrm{i})z^2 + 6z, \quad z \in \mathbb{C}$$

gegeben. Zerlegen Sie p in Linearfaktoren.

Lösungsvorschlag.

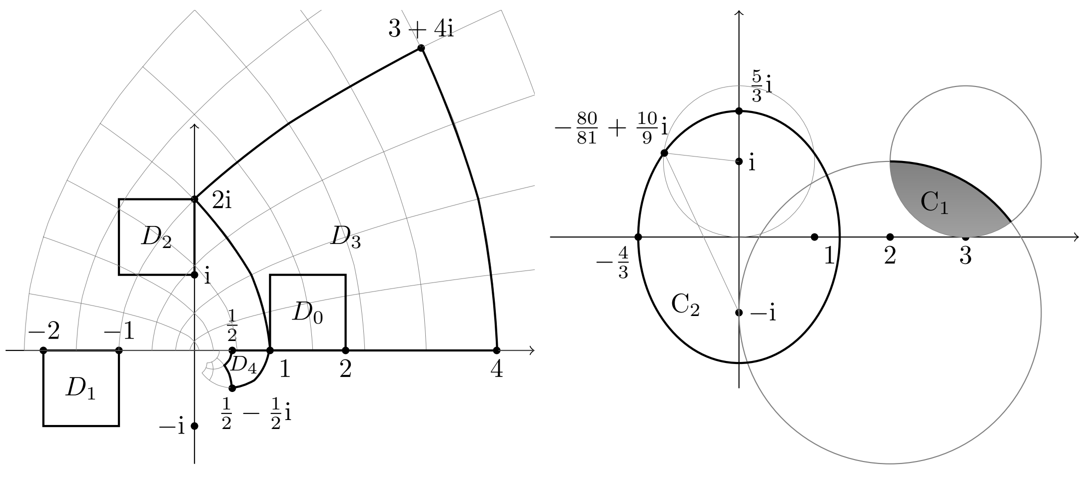
a) Für $z \in \mathbb{C}$ setzen wir $x = \operatorname{Re} z$ und $y = \operatorname{Im} z$. Es gelten die folgenden Äquivalenzen

$$\begin{aligned} z = |z| &\iff x + \mathrm{i}y = \sqrt{x^2 + y^2} \\ &\iff x = \sqrt{x^2} \wedge y = 0 \\ &\iff z \in \mathbb{R}_{\geq 0} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} z^2 = |z|^2 &\iff x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy = x^2 + y^2 \\ &\iff xy = 0 \wedge x^2 - y^2 = x^2 + y^2 \\ &\iff y = 0 \\ &\iff z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) Skizze der Mengen D_0, D_1, D_2, D_3, D_4, C_1 und C_2.



c) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \{0, \dots, n\}$ mit $a_k \neq 0$. Sei p ein reelles Polynom der Form

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

vom Grad n. Es gelte $p(z) = 0$ für ein $z \in \mathbb{C}$. Daraus folgt

$$p(\overline{z}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z}^k = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\,\overline{z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \overline{p(z)} = \overline{0} = 0.$$

Also ist $\overline{z}$ ebenfalls eine Nullstelle von p.

d) Offensichtlichst ist 0 eine Nullstelle von p, denn es gilt

$$p(z) = z(z^3 + (1 + \mathrm{i})z^2 + (6 + \mathrm{i})z + 6).$$

Eine Nullstelle des Ausdrucks in Klammern ist gegeben durch -1, denn

$$-1 + (1+\mathrm{i}) - (6+\mathrm{i}) + 6 = 0.$$

Die restliche Nullstellen von p finden wir durch eine Polynomdivision.

$$\begin{array}{ccccccc}
(z^3 & + & (1+\mathrm{i})z^2 & + & (6+\mathrm{i})z & + & 6) \div (z+1) = z^2 + \mathrm{i}z + 6. \\
z^3 & + & z^2 & & & & \\
 & & \mathrm{i}z^2 & + & (6+\mathrm{i})z & & \\
 & & \mathrm{i}z^2 & + & \mathrm{i}z & & \\
 & & & & 6z & + & 6 \\
 & & & & 6z & + & 6 \\
 & & & & & & 0
\end{array}$$

Nun suchen wir noch die Nullstellen von $z^2 + \mathrm{i}z + 6$. Es gilt

$$z^2 + \mathrm{i}z + 6 = 0 \iff \left(z + \frac{\mathrm{i}}{2}\right)^2 = -\frac{25}{4} \iff z + \frac{\mathrm{i}}{2} = \pm\frac{5\mathrm{i}}{2} \iff z = \frac{(-1 \pm 5)\mathrm{i}}{2}.$$

Somit gilt

$$p(z) = z(z+1)(z-2\mathrm{i})(z+3\mathrm{i}).$$

□

Aufgabe 3

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$. Dann divergiert die Folge (z^n).

b) Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$. Dann ist die Folge (z^n) genau dann konvergent, wenn $z = 1$.

c) Sei p ein Polynom (über $\mathbb{C}$). Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|p(n)|} = 1$.

d) Seien $k \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{z^n} = 0$.

Lösungsvorschlag.

a) Sei $K > 0$. Da $|z| > 1$, gibt es nach Folgerung 4.12¸(1) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|z|^{n_0} > K$. Also ist die Folge $(|z|^n)$ unbeschränkt und somit nach Aufgabe 1 a) divergent. Wäre (z^n) konvergent, dann wären auch die Folgen $(\operatorname{Re} z^n)$ und $(\operatorname{Im} z^n)$ konvergent. Wegen $|z^n| = \sqrt{(\operatorname{Re} z^n)^2 + (\operatorname{Im} z^n)^2}$ steht dies im Widerspruch zur Divergenz der Folge $(|z|^n)$. Folglich divergiert auch die Folge (z^n).

b) Wenn $z = 1$, dann ist klar, dass die Folge (z^n) konstant ist und somit konvergiert. Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ und $z \neq 1$. Dann gilt

$$\left|z^{n+1} - z^n\right| = |z^n(z-1)| = |z|^n\,|z-1| = |z-1| > 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Also konvergiert die Folge (z^n) nicht.

c) Seien $N \in \mathbb{N}$ und $a_k \in \mathbb{C}$ für $k \in \{0, \ldots, N\}$ mit $a_N \neq 0$. Sei p ein Polynom vom Grad N von der Form

$$p(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k n^k.$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\sqrt[n]{n} \to 1$ für $n \to \infty$ gilt. Multiplizieren wir diese Folge N mal mit sich selbst und nutzen die entsprechende Eigenschaft aus der Vorlesung zur Konvergenz von Produkten, so ergibt sich auch $\sqrt[n]{n^N} \to \infty$ für $n \to \infty$. Zudem gilt $\sqrt[n]{c} \to 1$ für alle Konstanten $c \geq 0$. Somit ist die Behauptung bereits bewiesen, falls $a_0 = \ldots = a_{N-1} = 0$. Sei also mindestens eine dieser Zahlen nicht Null. Nun beobachten wir, dass

$$|p(n)| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k|\, n^k \leq \left(\sum_{k=0}^{N} |a_k| \right) n^N$$

und

$$\begin{aligned} |p(n)| &\geq |a_N|\, n^N - \left| \sum_{k=0}^{N-1} a_k n^k \right| \\ &\geq |a_N|\, n^N - \sum_{k=0}^{N-1} |a_k|\, n^k \\ &\geq |a_N|\, n^N - \left(\sum_{k=0}^{N-1} |a_k| \right) n^{N-1} \\ &= n^N \left(|a_N| - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| \right). \end{aligned}$$

Wir wählen $n \geq \frac{2}{|a_N| \sum_{k=0}^{N-1} |a_k|}$ (und bemerken, dass wir nicht durch Null dividieren), sodass $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| \leq \frac{|a_N|}{2}$ und somit $|p(n)| \geq \frac{|a_N|}{2} n^N$ gilt. Insgesamt gilt also für jedes feste n, welches groß genug ist, dass

$$\frac{|a_N|}{2} n^N \leq |p(n)| \leq \left(\sum_{k=0}^{N} |a_k| \right) n^N$$

und somit schließlich (wir benutzen Lemma 4.13)

$$1 = 1 \cdot 1 \leftarrow \sqrt[n]{\frac{|a_N|}{2}}\, \sqrt[n]{n^N} \leq \sqrt[n]{|p(n)|} \leq \sqrt[n]{\left(\sum_{k=0}^{N} |a_k| \right)}\, \sqrt[n]{n^N} \to 1 \cdot 1 = 1$$

für $n \to \infty$. Nach Satz 6.2(3) folgt die Behauptung.

d) Wir setzen $x = |z| - 1 > 0$. Für $n > 2k$ gilt $\frac{n}{2} > k$ und somit $n - k > \frac{n}{2}$. Mit dem

Binomischen Satz folgt nun, dass

$$\begin{aligned}|z|^n &= (1+x)^n \\ &= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} x^l \\ &\geq \binom{n}{k+1} x^{k+1} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!} x^{k+1} \\ &> \frac{(n-k)^{k+1}}{(k+1)!} x^{k+1} \\ &\geq \frac{n^{k+1}x^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!},\end{aligned}$$

was wiederum

$$\left|\frac{n^k}{z^n}\right| \leq \frac{2^{k+1}(k+1)!}{x^{k+1}} \cdot \frac{1}{n} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

liefert. □

Aufgabe 4
Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen (a_n) auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

a) $a_n = \dfrac{6n^2+3n-4}{1+n^2}$.

b) $a_n = \dfrac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n^2} k$.

c) $a_n = \sqrt{9n^2+2n+1} - 3n$.

d) $a_n = \left(\dfrac{3+4\mathrm{i}}{5}\right)^n$.

e) $a_n = \dfrac{(n+2)^{42} - n^{42}}{n^{41}}$.

f) $a_n = \dfrac{1+n^3-2n^4}{n3^n - 4n^2}$.

g) $a_n = \left(\dfrac{1}{2^n} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \dfrac{1}{3^{n+k}}\right)^{1/n}$.

h) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$.

i) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

j) $a_n = \sqrt[n]{n!}$.

k) $a_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right)$.

l) $a_n = \sqrt[n]{x^n + y^n + z^n}$, $x, y, z \geq 0$.

Lösungsvorschlag.

a) Wir berechnen

$$a_n = \frac{6n^2+3n-4}{1+n^2} = \frac{6+3n^{-1}-4n^{-2}}{n^{-2}+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\lim_{n\to\infty} n^{-k} = 0$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = 6$ aus Satz 6.3.

b) Nach Vorlesung gilt $\sum_{k=1}^{n^2} k = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$. Damit erhalten wir

$$a_n = \frac{n^2(n^2+1)}{2n^4} = \frac{1+n^{-2}}{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wie in Teil a) folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ berechnen wir

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{9n^2+2n+1} - 3n \\ &= \frac{(\sqrt{9n^2+2n+1} - 3n)(\sqrt{9n^2+2n+1} + 3n)}{\sqrt{9n^2+2n+1} + 3n} \\ &= \frac{2n+1}{\sqrt{9n^2+2n+1} + 3n} \\ &= \frac{2+n^{-1}}{\sqrt{9+2n^{-1}+n^{-2}} + 3}. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3}$.

d) Da $\left|\frac{3+4\mathrm{i}}{5}\right| = 1$ aber $\frac{3+4\mathrm{i}}{5} \neq 1$ ist, folgt aus Aufgabe 3 c), dass die Folge (a_n) divergiert.

e) Nach dem Binomischen Satz gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(n+2)^{42} - n^{42}}{n^{41}} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{42} \binom{42}{k} 2^{42-k} n^k - n^{42}}{n^{41}} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{41} \binom{42}{k} 2^{42-k} n^k}{n^{41}} \\ &= \binom{42}{41} \cdot 2 + \sum_{k=0}^{40} \binom{42}{k} 2^{42-k} n^{k-41}. \end{aligned}$$

Es folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \binom{42}{41} 2 = 84$.

f) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{1+n^3-2n^4}{n3^n - 4n^2} = \frac{\frac{1}{n3^n} + \frac{n^2}{3^n} - \frac{2n^3}{3^n}}{1 - \frac{4n}{3^n}}.$$

Aus Aufgabe 3 d) folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

g) Aus der binomischen Formel folgt

$$a_n = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)^{1/n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt

$$\frac{1}{2} \leq a_n \leq \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{4}{8}\right)^n\right)^{1/n} = \frac{1}{2}\sqrt[n]{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$, folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$ aus Satz 6.2 (3).

h) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{(\frac{n}{n-1})^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1} \cdot (1+\frac{1}{n-1})}.$$

Wir erhalten $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^{-1}$.

i) Es gilt

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n\cdot n}} = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}.$$

Der Ausdruck in der Wurzel ist eine Teilfolge der Folge, die gegen e konvergiert beziehungsweise deren Folgenglieder nach Vorlesung alle zwischen 2 und 3 liegen. Damit folgt

$$\sqrt[n]{2} \leq a_n \leq \sqrt[n]{3}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir erhalten $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ nach Satz 6.2 (3).

j) Konvergente Folgen sind beschränkt. Wir zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist und damit nicht konvergent sein kann. Sei dazu $k \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$(2k)! = \prod_{n=1}^{2k} n = \left(\prod_{n=1}^{k} n\right)\left(\prod_{n=k+1}^{2k} n\right) \geq k^k,$$

wobei wir verwendet haben, dass das zweite geklammerte Produkt aus k Faktoren besteht, von denen jeder größer als k ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt damit:

$$a_{2n^2} = \sqrt[2n^2]{(2n^2)!} \geq \sqrt[2n^2]{(n^2)^{n^2}} = \sqrt[2n^2]{n^{2n^2}} = n.$$

Da die natürlichen Zahlen, laut Vorlesung, nicht nach oben beschränkt sind, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach oben beschränkt.

k) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k+1)(k-1)}{k^2} = \frac{\frac{(n+1)!}{2} \cdot (n-1)!}{(n!)^2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1+n^{-1}}{2}.$$

Es folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

l) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\max\{x,y,z\} = \sqrt[n]{\max\{x^n,y^n,z^n\}} \leq \sqrt[n]{x^n+y^n+z^n} \leq \sqrt[n]{3}\sqrt[n]{\max\{x^n,y^n,z^n\}}.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1$, folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \max\{x,y,z\}$ für $n \to \infty$ nach Satz 6.2(3). $\square$

Aufgabe 5
Sei $c > 0$. Sei $a_1 > 0$. Wir definieren die Folge (a_n) durch die rekursive Vorschrift $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{c}$ gilt.

b) Wir setzen $r_n = a_n - \sqrt{c}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $r_n \geq 0$ und $r_{n+1} \leq \frac{r_n^2}{2\sqrt{c}}$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.

Lösungsvorschlag.

a) Wir wollen das Monotoniekriterium aus Satz 6.3 anwenden. Es ist aufgrund der rekursiven Definition von (a_n) klar, dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Außerdem gilt

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) = \frac{a_n^2 + c - 2\sqrt{c}a_n + 2\sqrt{c}a_n}{2a_n} = \frac{(a_n - \sqrt{c})^2 + 2a_n\sqrt{c}}{2a_n} \geq \sqrt{c}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit dieser Information erhalten wir $c \leq a_n^2$ für alle $n \geq 2$ und wir berechnen damit ferner

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + c}{2a_n} \leq \frac{2a_n^2}{2a_n} = a_n$$

für alle $n \geq 2$. Also ist $(a_n)_{n\geq 2}$ monoton fallend und nach unten beschränkt. Nach Satz 6.3 konvergiert die Folge (a_n) gegen einen Grenzwert $a \in [\sqrt{c}, \infty)$. Um a zu bestimmen, können wir in der Rekursionsvorschrift den Grenzwert $n \to \infty$ betrachten. Aus $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$ folgt, dass a die Gleichung $a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{c}{a}\right)$ erfüllt. Die einzige positive Lösung der quadratischen Gleichung $a^2 = \frac{1}{2}(a^2 + c)$ ist durch $a = \sqrt{c}$ gegeben. Damit folgt die Behauptung.

b) Nach Teil a) ist $(a_n)_{n\geq 2}$ eine monoton fallende Folge mit Grenzwert $\sqrt{c}$. Also gilt $a_n \geq \sqrt{c} > 0$ für alle $n \geq 2$. Außerdem gilt

$$r_{n+1} = a_{n+1} - \sqrt{c} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) - \sqrt{c} = \frac{a_n^2 + c - 2\sqrt{c}a_n}{2a_n} = \frac{(a_n - \sqrt{c})^2}{2a_n} \leq \frac{r_n^2}{2\sqrt{c}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. □