Karlsruher Institut für Technologie

15. November 2019
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschlag zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Wahr oder falsch?)

Seien (a_n) und (b_n) Folgen.

W F
□ ■ $H(a_n + b_n) = \{x + y : x \in H(a_n), y \in H(b_n)\}$.

Die Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir $a_n = (-1)^n$ und $b_n = (-1)^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $H(a_n + b_n) = \{0\}$, $H(a_n) = H(b_n) = \{-1, 1\}$ und somit $\{x + y : x \in H(a_n), y \in H(b_n)\} = \{-2, 0, 2\}$.

W F
□ ■ $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

Die Aussage ist falsch. Im gleichen Beispiel wie in Teil a) gilt $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = 0$ aber $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n = 2$.

W F
□ ■ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, (b_n) beschränkt $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergiert.

Die Aussage ist falsch. Setze $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ und $b_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert nach dem Leibnizkriterium, die Folge (b_n) ist beschränkt aber die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent.

W F
■ □ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut, (b_n) beschränkt $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergiert absolut.

Die Aussage ist wahr. Es sei $C > 0$ mit $|b_n| \le C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $N \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n b_n| \le C \sum_{n=1}^{N} |a_n| \le C \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty,$$

wobei wir verwendet haben, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert. Aus dieser Abschätzung folgt, dass auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut konvergiert.

W F
□ ■ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ konvergiert.

Diese Aussage ist falsch. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ setzen wir $a_1 = 1$ und $a_n = \frac{1}{k}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $2^{k-1} < n \le 2^k$. Wie im Beweis der Divergenz der harmonische Reihe folgt damit

$$\sum_{n=1}^{2^N} \frac{a_n}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \ge \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$$

für jedes $N \in \mathbb{N}$. Da die harmonische Reihe divergiert, folgt hieraus die Divergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$.

Aufgabe 2
Sei (a_n) eine Cauchyfolge.

a) Zeigen Sie, dass (a_n) beschränkt ist. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es also eine konvergente Teilfolge von (a_n).

b) Zeigen Sie mit Teil a), dass (a_n) konvergiert.

Lösungsvorschlag.

a) Wir gehen ähnlich wie im Beweis von Aufgabe 1 a), Blatt 3, vor. Zu $\varepsilon = 1$ existiert nach Voraussetzung ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < 1$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ und $n, m \geq n_0$. Insbesondere erhalten wir
$$|a_n| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| \leq 1 + |a_{n_0}|$$
für alle $n \geq n_0$. Wir setzen $C = \max \{a_n : n \in \mathbb{N}, n \leq n_0\} \cup \{1 + |a_{n_0}|\}$ und erhalten wie behauptet
$$|a_n| \leq C$$
für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n). Wir setzen $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$ und wollen zeigen, dass die Folge (a_n) gegen a konvergiert. Dazu sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k \geq k_0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m \geq n_0$. Wir setzen $N_0 = \max\{n_0, n_{k_0}\}$ und wählen ein $k_1 \geq k_0$ mit $n_{k_1} \geq N_0$. Dann erhalten wir
$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_{k_1}}| + |a_{n_{k_1}} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
für alle $n \geq N_0$. Damit ist gezeigt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ gilt. □

Aufgabe 3
Bestimmen Sie die Häufungswerte der Folge (a_n) sowie $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

a) $a_n = (1 + (-1)^n)^n$.

b) $a_n = (-1 + \frac{1}{2}(-1)^{n+1})^{n+1}$.

c) $a_n = (-1)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n-1}$.

d) $a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2^n}, & n = 3k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ 2, & n = 3k-1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ 2 + \frac{n+1}{n}, & n = 3k-2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Lösungsvorschlag.

a) Wir betrachten die zwei Teilfolgen (a_{2k}) und (a_{2k+1}). Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt
$$a_{2k} = 2^{2k} = 4^k \quad \text{und} \quad a_{2k+1} = 0.$$
Folglich ist (a_{2k}) nach oben unbeschränkt mit $a_{2k} \to \infty$ für $k \to \infty$ und es gilt $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0$. Da diese beiden Teilfolgen die komplette Folge abdecken, gilt
$$H(a_n) = \{0\}, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = 0.$$

b) Wir betrachten die zwei Teilfolgen (a_{2k}) und (a_{2k+1}). Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{2k} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{2k+1} = -\left(\frac{3}{2}\right)^{2k+1} \quad \text{und} \quad a_{2k+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2}.$$

Wir erhalten die nach unten unbeschränkte Folge (a_{2k}) mit $a_{2k} \to -\infty$ für $k \to \infty$ und $\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0$. Da diese beiden Teilfolgen die komplette Folge abdecken, gilt

$$H(a_n) = \{0\}, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

c) Wir betrachten die zwei Teilfolgen (a_{2k}) und (a_{2k+1}). Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{2k} = \left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)^{2k-1} = \left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)^{2k+1}\left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)^{-2}$$

und

$$a_{2k+1} = -\left(\frac{2k+3}{2k+2}\right)^{2k} = -\left(1 + \frac{1}{2k+2}\right)^{2k+2}\left(1 + \frac{1}{2k+2}\right)^{-2}.$$

Wir erhalten $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \mathrm{e}$ und $\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = -\mathrm{e}$. Da diese beiden Teilfolgen die komplette Folge abdecken, gilt

$$H(a_n) = \{-\mathrm{e}, \mathrm{e}\}, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e} \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = -\mathrm{e}.$$

d) Wir betrachten die drei Teilfolgen (a_{3k}), (a_{3k-1}) und (a_{3k-2}). Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{3k} = 1 + \frac{1}{8^k}, \quad a_{3k-1} = 2, \quad \text{und} \quad a_{3k-2} = 2 + \frac{(3k-2)+1}{3k-2} = 3 + \frac{1}{3k-2}.$$

Somit gilt

$$\lim_{k\to\infty} a_{3k} = 1, \quad \lim_{k\to\infty} a_{3k-1} = 2 \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} a_{3k-2} = 3.$$

Da die drei Teilfolgen die komplette Folge abdecken, erhalten wir

$$H(a_n) = \{1, 2, 3\}, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = 3 \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = 1. \qquad \square$$

Aufgabe 4

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir a_n durch $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

a) Zeigen Sie: Es gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ divergent ist.

c) Warum ist das Leibnizkriterium hier nicht anwendbar?

Lösungsvorschlag.

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt $n^2 > n$ und somit $n > \sqrt{n}$. Daraus folgt

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} > 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Es ist klar, dass auch $a_1 = 2 > 0$ gilt. Die Folgen $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sind Nullfolgen, daher konvergiert auch (a_n) gegen 0.

b) Sei $N \in \mathbb{N}$. Die N-te Partialsumme der gesuchten Reihe ist durch

$$\sum_{n=1}^{N} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

gegeben. Aus dem Leibnizkriterium folgt, dass die Folge $\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergiert, da $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Angenommen die gesuchte Reihe wäre konvergent. Nach Definition bedeutet dies, das die Folge $\left(\sum_{n=1}^{n}(-1)^n a_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Wegen

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{N} (-1)^n a_n$$

folgt daraus, dass auch die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergent wäre. Nach Vorlesung ist die falsch und somit muss die Annahme verworfen werden. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ ist daher divergent.

c) Das Leibnizkriterium ist in diesem Beispiel nicht anwendbar, weil die Voraussetzung über die Monotonie der Folge (a_n) nicht erfüllt ist. □

Aufgabe 5

Berechnen Sie den Wert der folgenden Reihen.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2k}}$. b) $\displaystyle\sum_{k=100}^{\infty} \frac{1}{3^{k}}$. c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^{k}}$.

Lösungsvorschlag.

a) Mit der Formel für die geometrische Reihe gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{9^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{9}{8}.$$

b) Prinzipiell könnte man die gesuchte Reihe über

$$\sum_{k=100}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} - \sum_{k=0}^{99} \frac{1}{3^k}$$

berechnen, da man die Formel für die geometrische Reihe und für die 99-te Partialsumme zur Verfügung hat. Es ist aber oft einfacher bei der geometrischen

Reihe multiplikativ vorzugehen und den Term $\frac{1}{3^{100}}$ auszuklammern. Mit dieser Vorgehensweise erhalten wir

$$\sum_{k=100}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^{100}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^{100}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2 \cdot 3^{99}}.$$

c) Sei $N \in \mathbb{N}$. Wir berechnen durch vertauschen der Summationsreihenfolge

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} \frac{k}{3^k} &= \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{3^k} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{3^k} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{N-n} \frac{1}{3^k} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{3^n} \cdot \frac{1-\frac{1}{3^{N-n+1}}}{1-\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{3^n} - \frac{3}{2} \cdot \frac{N}{3^{N+1}}.
\end{aligned}$$

Da $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{N}{3^{N+1}} = 0$ gilt, folgt aus der geometrischen Reihe, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{3^k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

gilt. □

Aufgabe 6
Wir betrachten die konvergenten Reihen

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k}$, b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Geben Sie in beiden Fällen $N \in \mathbb{N}$ an, für welches die N-te Partialsumme der Reihe den Reihenwert besser als 10^{-10} approximiert.

Lösungsvorschlag.

a) Sei $N \in \mathbb{N}$. Bei der Reihe handelt es sich um eine geometrische Reihe. Daher können wir den Reihenwert und die N-te Partialsumme konkret ausrechnen. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{10} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{9}$$

und

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{10} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1-\frac{1}{10^N}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^N}\right).$$

Der Approximationsfehler der N-ten Partialsumme beträgt also

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{10^k}-\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{10^k}\right|=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{10^N}.$$

Für alle $N\in\mathbb{N}$ mit $N\geq 10$ ist dieser Fehler kleiner als 10^{-10}.

b) In diesem Fall können wir weder den Reihenwert noch den Approximationsfehler explizit berechnen. Wir können den Fehler jedoch abschätzen. Sei $N\in\mathbb{N}$. Wir bezeichnen mit s_N die N-te Partialsumme, also $s_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ und mit s den Reihenwert, also $s=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Dann ist (s_{2N}) eine wachsende Folge, denn es gilt

$$s_{2N+2}=s_{2N}+\frac{1}{2N+1}-\frac{1}{2N+2}>s_{2N}$$

und (s_{2N+1}) ist fallend, da

$$s_{2N+3}=s_{2N+1}-\frac{1}{2N+2}+\frac{1}{2N+3}<s_{2N+1}$$

gilt. Beide Teilfolgen konvergieren gegen s und wir erhalten somit

$$s_{2N}\leq s\leq s_{2N+1}.$$

Daraus folgen

$$0\leq s-s_{2N}\leq s_{2N+1}-s_{2N}\quad\text{und}\quad 0\leq s_{2N+1}-s\leq s_{2N+1}-s_{2N}.$$

Für jedes $N\in\mathbb{N}$ erhalten wir also die Fehlerabschätzung

$$|s-s_{N+1}|\leq|s_N-s_{N+1}|=\frac{1}{N+1}.$$

Für $N\in\mathbb{N}$ mit $N\geq 10^{-10}-1$ können wir also sicherstellen, dass der Fehler kleiner als 10^{-10} ist. □

Aufgabe 7

a) Für jedes $n\in\mathbb{N}$ sei I_n ein abgeschlossenes Intervall der Länge $l_n\in(0,\infty)$. Es gelte $I_{n+1}\subseteq I_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty}l_n=0$. Zeigen Sie, dass es $x\in\mathbb{R}$ mit $\{x\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}I_n$ gibt. (*Prinzip der Intervallschachtelung*)

b) Wir wollen zeigen, dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist. Wenn wir das Gegenteil annehmen, dann können wir $\mathbb{R}=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ schreiben und erhalten damit

$$\emptyset=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{R}\setminus\{x_n\}.$$

Führen Sie dies mit Hilfe von Teil a) zu einem Widerspruch.

c) Seien A und B Mengen. Seien $\varphi\colon A \to B$ und $\psi\colon B \to A$ injektive Abbildungen. Zeigen Sie, dass es eine bijektive Abbildung zwischen A und B gibt.

Lösungsvorschlag.

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $a_n = \min I_n$ und $b_n = \max I_n$. Aus $I_{n+1} \subseteq I_n$ folgt, dass (a_n) eine wachsende Folge ist, die durch b_1 nach oben beschränkt ist und dass (b_n) eine fallende Folge ist, die durch a_1 nach unten beschränkt ist. Also sind die Folgen (a_n) und (b_n) konvergent. Ferner gilt

$$\lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n - a_n = \lim_{n\to\infty} l_n = 0,$$

d.h. es existiert $x \in \mathbb{R}$ mit $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \le x \le b_n$, d.h., $x \in I_n$. Es folgt $\{x\} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Außerdem erfüllt jedes $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ die Ungleichung $a_n \le y \le b_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, woraus $x = y$ und $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ folgt.

b) Es gibt ein abgeschlossenes Intervall I_1 der Länge $\frac{1}{3}$, welches $I_1 \subseteq \mathbb{R} \setminus \{x_1\}$ erfüllt. Wir nehmen an, dass wir n abgeschlossen Intervalle $I_1, \ldots, I_n$ mit $I_{k+1} \subseteq I_k$ für $k \in \{1, \ldots, n_1\}$ und $I_n \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} \mathbb{R} \setminus \{x_k\}$ konstruiert haben, wobei die Länge von I_k gerade $\frac{1}{3^k}$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$ sei. Wir erhalten dann

$$I_n \setminus \{x_{n+1}\} \subseteq \bigcap_{k=1}^{n+1} \mathbb{R} \setminus \{x_k\}$$

und wir können ein abgeschlossenes Intervall $I_{n+1} \subseteq I_n \setminus \{x_n + 1\}$ wählen, welches die Länge $\frac{1}{3^{n+1}}$ hat. Das Prinzip der vollständigen Induktion liefert somit eine Intervallschachtelung wie in Teil a), welche nach Konstruktion

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R} \setminus \{x_n\} = \emptyset$$

erfüllt. Nach Teil a) gilt aber $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$, ein Widerspruch. Die Annahme, dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist, muss also verworfen werden.

c) Sei $a \in A$. Wir bilden ausgehend von a die folgende „Kette“ von Elementen die abwechslend in A und in B liegen:

$$\cdots \to \varphi^{-1}(\psi^{-1}(a)) \to \psi^{-1}(a) \to a \to \varphi(a) \to \psi(\varphi(a)) \to \cdots.$$

Die Injektivität der Abbildungen φ und ψ zeigt, dass es höchstens ein Urbild $\psi^{-1}(a)$ gibt, allerdings kann es auch sein, dass es kein solches Urbild gibt, in diesem Fall bricht die Kette auf der linken Seite ab. Außerdem ist es möglich, dass in der Kette ein Element wiederholt vorkommt, in diesem Fall ist die Kette zyklisch. Außerdem ist jedes Element von A oder B in genau einer solcher Kette enthalten. Wir müssen also nur für jede solche Kette eine Bijektion zwischen den Kettengliedern in A und in B angeben. Es gibt vier Fälle. Wenn die Kette in beide Richtungen unendlich oder zyklisch ist, dann ist φ eine Bijektion auf dieser Kette. Wenn die Kette in einem Element von A aufhört, dann ist ebenfalls φ eine Bijektion auf dieser Kette. Wenn die Kette in einem Element von B aufhört, dann ist ψ eine Bijektion auf dieser Kette. $\square$