Karlsruher Institut für Technologie

14. November 2019
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

5. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Wahr oder falsch?)
Sei (a_n) eine Folge. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

a) W ☐ F ☐ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 :\ \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

b) W ☐ F ☐ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 :\ \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1.$

c) W ☐ F ☐ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 :\ \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

d) W ☐ F ☐ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 :\ \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 - \frac{2}{n} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

e) W ☐ F ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\,|a_n| \in [0,\infty) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass die Reihe

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \cdots$$

konvergiert, aber dass das Cauchyprodukt der Reihe mit sich selbst divergiert.

Aufgabe 3
Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen? Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Reihenwert.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n z^n.$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n.$

Aufgabe 4
Untersuchen Sie die nachstehenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n.$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n-1}}{2^{5n}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{5n}{4n}^{-1}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$

Aufgabe 5
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\mathrm{e}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)$.

Aufgabe 6
Für welche $x \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen?

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{(n-1)^2}x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{n(1+(-1)^n)}x^{2n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)z^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+3\mathrm{i})^n}{n^2}$

Aufgabe 7
Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme die folgenden Formeln für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

a) $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$.

b) $\cos(2z) = 1 - 2\sin^2(z) = 2\cos^2(z) - 1$.

c) $\sin(z) + \sin(w) = 2\sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\cos\left(\frac{z-w}{2}\right)$.

Modulprüfung

Die Klausur *Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik* findet am **20. Februar 2020** von **11–13 Uhr** statt. Die Anmeldung ist ab sofort im Campus Management Portal möglich. Der **Anmeldeschluss** ist am **9. Februar 2020**. Die **Hörsaalverteilung** wird ab 13. Februar 2020 durch Aushang am Brett neben dem Zimmer 2.027 (Geb. 20.30) bekanntgegeben.