Karlsruher Institut für Technologie

22. November 2019
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

# Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

## Lösungsvorschlag zum 5. Übungsblatt

### Aufgabe 1 (Wahr oder falsch?)

Sei $(a_n)$ eine Folge.

W F
☐ ■ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \colon \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Die Aussage ist falsch. Ein Gegenbeispiel ist durch die harmonische Reihe mit $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Es gilt nämlich $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$, trotzdem ist die Reihe divergent.

W F
■ ☐ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \colon \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$.

Diese Aussage ist wahr. Da die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, ist die Folge $(a_n)$ eine Nullfolge. Somit existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| \leq 1$ für alle $n \geq n_0$. Daraus folgt auch $\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$ für alle $n \geq n_0$.

W F
☐ ■ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \colon \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Diese Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir eine harmonische Reihe, wobei wir $a_1 = a_2 = 1$ und $a_n = \frac{1}{n-2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ setzen. Es gilt in diesem Fall

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n-2}{n-1} = 1 - \frac{1}{n-1} < 1 - \frac{1}{n}$$

für alle $n \geq 3$, die Reihe ist jedoch divergent.

W F
■ ☐ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \colon \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 - \frac{2}{n} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Die Aussage ist wahr. Für alle $n \geq n_0$ gilt $|a_{n+1}| \leq (1 - \frac{2}{n})\,|a_n|$. Wir erhalten also iterativ

$$|a_{n+1}| \leq \left(\prod_{k=n_0}^{n} \left(1 - \frac{2}{k}\right)\right) |a_{n_0}| = \left(\prod_{k=n_0}^{n} \frac{k-2}{k}\right) |a_{n_0}| = \frac{(n_0-2)(n_0-1)}{(n-1)n}\,|a_{n_0}|\,.$$

für alle $n \geq n_0$. Da die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$ konvergiert, folgt die Behauptung aus dem Majorantenkriterium.

W F
■ ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\,|a_n| \in [0,\infty) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut.

Diese Aussage ist wahr. Sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} n^2\,|a_n|$. Es gilt $n^2\,|a_n| \leq a+1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und somit

$$|a_n| \leq \frac{a+1}{n^2}$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, folgt die Behauptung aus dem Majorantenkriterium.

**Aufgabe 2**
Zeigen Sie, dass die Reihe

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \cdots$$

konvergiert, aber dass das Cauchyprodukt der Reihe mit sich selbst divergiert.

*Lösungsvorschlag.* Die Reihe

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

konvergiert nach dem Leibnizkriterium, weil $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Mit einer Indexverschiebung erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Setze nun $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Für das Cauchyprodukt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ mit sich selbst berechnen wir

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} a_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} \cdot \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n-k+1} \cdot \sqrt{k+1}}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Mit der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung folgt

$$\begin{aligned}
|c_n| &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n-k+1} \cdot \sqrt{k+1}} \\
&\geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\frac{1}{2}(n-k+1+k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} \\
&= \frac{2(n+1)}{n+2} \geq \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Demnach ist $(c_n)$ keine Nullfolge und damit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ divergent. □

**Aufgabe 3**
Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen? Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Reihenwert.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$. b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2z^n$.

*Lösungsvorschlag.* Der Konvergenzradius beider Potenzreihen ist 1, da

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$$

gilt.

Somit sind beide Reihen für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ konvergent und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$ divergent. Für $|z| = 1$ bilden die Reihenglieder keine Nullfolge, daher sind in diesem Fall beide Reihen divergent. Sei nun $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Wir berechnen in beiden Fällen den Reihenwert.

a) Es gilt mit dem Beispiel zum Cauchyprodukt aus der Vorlesung

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} z^{n-k}z^k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n.$$

Somit folgt aus der geometrischen Reihe die Formel $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$. Damit erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = z\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = z\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$n^2 = 2\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) - n$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt Damit folgt

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n^2z^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(2\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) - n\right) z^n \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(z^{n-k})(kz^k) - \sum_{n=0}^{\infty} nz^n \\ &= 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} kz^k\right) - \sum_{n=0}^{\infty} nz^n.\end{aligned}$$

Mit Teil a) erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n^2z^n &= 2\cdot\frac{1}{1-z}\cdot\frac{z}{(1-z)^2} - \frac{z}{(1-z)^2} \\ &= \frac{z}{(1-z)^2}\cdot\left(\frac{2}{1-z} - 1\right) \\ &= \frac{z}{(1-z)^2}\cdot\frac{1+z}{1-z} \\ &= \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}.\end{aligned}$$

□

**Aufgabe 4**
Untersuchen Sie die nachstehenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n.$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n-1}}{2^{5n}}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{5n}{4n}^{-1}$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n}$

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$

*Lösungsvorschlag.*

a) Setze $a_n = (\frac{n-1}{n})^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Nach Aufgabe 4 h), Blatt 3, gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^{-1}$. Damit ist $(a_n)$ keine Nullfolge und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{n-1}{n})^n$ divergiert.

b) Setze $a_n = (-1)^n \frac{5^{2n-1}}{2^{5n}}$ jedes $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$a_n = \frac{1}{5}\left(-\frac{25}{32}\right)^n$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{5}} \frac{25}{32} = \frac{25}{32} < 1,$$

ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n-1}}{2^{5n}}$ konvergent. Da es sich hier um eine geometrische Reihe handelt, kann man den Reihenwert auch konkret berechnen. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n-1}}{2^{5n}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{-25}{32} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{25}{32}\right)^n = -\frac{5}{32} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{25}{32})} = -\frac{5}{57}.$$

c) Setze $a_n = \frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Da $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \to 1$, gibt es $C > 0$ mit $\sqrt[n]{n} \leq C$. Somit folgt

$$|a_n| = \frac{\sqrt[n]{n}}{n!} \leq \frac{C}{n!}.$$

Da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n!}$ nach Vorlesung gegen $C(\mathrm{e}-1)$ konvergiert, konvergiert auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$ absolut nach dem Majorantenkriterium.

d) Setze $a_n = \frac{n!}{n^n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir erhalten $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \mathrm{e}^{-1} < 1$. Deshalb konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ absolut nach dem Quotientenkriterium.

e) Setze $a_n = \frac{1}{2^n}(\frac{n+1}{n})^{n^2}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir erhalte $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\mathrm{e}}{2} > 1$. Deshalb divergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(\frac{n+1}{n})^{n^2}$ nach dem Wurzelkriterium.

f) Setze $a_n = \binom{5n}{4n}^{-1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(4(n+1))!(n+1)!(5n)!}{(5(n+1))!(4n)!n!}\\ &= \frac{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)(n+1)}{(5n+5)(5n+4)(5n+3)(5n+2)(5n+1)}\\ &= \frac{(4+\frac{4}{n})(4+\frac{3}{n})(4+\frac{2}{n})(4+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})}{(5+\frac{5}{n})(5+\frac{4}{n})(5+\frac{3}{n})(5+\frac{2}{n})(5+\frac{1}{n})}\end{aligned}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir erhalten $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{4^4}{5^5} < 1$. Deshalb ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\binom{5n}{4n}^{-1}$ absolut konvergent nach dem Quotientenkriterium.

g) Setze $a_n = \frac{n+4}{n^2-3n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $n \geq 3$ gilt $-3n+1 \leq 0$. Daher folgt

$$a_n \geq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

für jedes $n \geq 3$. Da die harmonische Reihe divergiert, divergiert auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$ nach dem Minorantenkriterium

h) Setze $a_n = \frac{\mathrm{i}^n}{n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n}$ konvergiert nicht absolut, da $|a_n| = \frac{1}{n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Sei $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$a_{2k} = \frac{\mathrm{i}^{2k}}{2k} = \frac{(-1)^k}{2k}.$$

Sei nun $n = 2k+1$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$a_{2k+1} = \frac{\mathrm{i}^{2k+1}}{2k+1} = \mathrm{i}\frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Deshalb gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Da die beiden Folgen $(\frac{1}{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(\frac{1}{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallende Nullfolgen sind, konvergieren beide Reihen nach dem Leibnizkriterium und damit per Definition auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n}$.

i) Setze $a_n = (-1)^n(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$|a_n| = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n^2}.$$

Da die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2})$ absolut. $\square$

**Aufgabe 5**

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$.

*Lösungsvorschlag.* Nach Vorlesung gilt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}$.

a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen $a_n = \mathrm{e} - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 \le a_n &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ &\le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2^{1-n}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir $|a_n| \le \frac{1}{2^{n-1}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Da die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ konvergiert, folgt aus dem Majorantenkriterium die absolute Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$. Wir setzen $b_n = \mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Es gilt

$$\begin{aligned}
b_n &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
&\geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{n!}{(n-k)!} \left(\frac{1}{n}\right)^k\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{n!}{(n-k)!} \left(\frac{1}{n}\right)^k\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{n \cdots n}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right) \\
&\geq \frac{1}{2!} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2n}.
\end{aligned}$$

Da die harmonische Reihe divergent ist, folgt aus dem Minorantenkriterium, dass auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergiert. □

**Aufgabe 6**

Für welche $x \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen?

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{n(1+(-1)^n)} x^{2n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) z^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3\mathrm{i})^n}{n^2}$

*Lösungsvorschlag.*

a) Setze $a_n = (2n+1)/(n-1)^2$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{2n+1}{(n-1)^2} \cdot \frac{n^2}{2n+3} = \frac{2+1/n}{(1-1/n)^2} \cdot \frac{1}{2+3/n}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir erhalten $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1$. Die Reihe hat daher den Konvergenzradius 1. Wir müssen nun noch die Ränder des Konvergenzintervalls, also $x = -1$ und $x = 1$, untersuchen. Dies liefert die zwei Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}(-1)^n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}.$$

Die Konvergenz der ersten Reihe wird durch das Leibnizkriterium garantiert, denn es gilt

$$a_n = \frac{2n+1}{(n-1)^2} = \frac{2(n-1)+3}{(n-1)^2} = \frac{2}{n-1} + \frac{3}{(n-1)^2} \geq \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} = \frac{2n+3}{n^2} = a_{n+1}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die zweite Reihe hingegen divergiert nach dem Minorantenkriterium, da $a_n \geq 2n/n^2 = 2/n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Insgesamt konvergiert die Reihe konvergiert genau dann, wenn $x \in [-1, 1)$ gilt.

b) Die Reihe hat die Form $\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$ mit $a_{2n} = \mathrm{e}^{n(1+(-1)^n)}$ und $a_{2n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist

$$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \sqrt[2n]{|\mathrm{e}^{n(1+(-1)^n)}|} = \begin{cases} \mathrm{e}^{2n/2n} = \mathrm{e}, & n \text{ gerade}, \\ \mathrm{e}^{0/2n} = 1, & n \text{ ungerade}, \end{cases}$$

und wegen $\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = e$, d.h. die Potenzreihe hat den Konvergenzradius $\mathrm{e}^{-1}$. Für $x = \pm\mathrm{e}^{-1}$ ergibt sich die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{n(1+(-1)^n)}\mathrm{e}^{-2n}.$$

Diese Reihe ist divergent, da für gerades $n$ gilt: $\mathrm{e}^{n(1+(-1)^n)}\mathrm{e}^{-2n} = \mathrm{e}^{2n}\mathrm{e}^{-2n} = 1 \nrightarrow 0$ $(n \to \infty)$. Die Potenzreihe konvergiert daher nur für $x \in (-e^{-1}, e^{-1})$.

Bemerkung: Man kann auch $y := x^2$ setzen und $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} y^n$ betrachten. Diese Reihe hat Konvergenzradius $e^{-2}$, d.h. sie ist konvergent für $|y| < e^{-2}$ und divergent für $|y| > e^{-2}$. Hieraus folgt dann Konvergenz für $|x| < e^{-1}$ und Divergenz für $|x| > e^{-1}$.

c) Für $a_n := 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ gilt offenbar $1 \leq a_n \leq n$. Wegen $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ folgt hieraus $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n\to\infty} 1$. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ hat also den Konvergenzradius $R = 1^{-1} = 1$. Für $|z| = 1$ konvergiert die Reihe nicht, denn dann gilt $|a_n z^n| = a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, d.h. die Reihenglieder konvergieren nicht gegen 0. Konvergenz der Reihe liegt also nur für $|z| < 1$ vor.

d) Für den Konvergenzradius $R$ von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3\mathrm{i})^n}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z+3\mathrm{i})^n$ mit $a_n := \frac{1}{n^2}$ ergibt sich wegen

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$$

$R = 1^{-1} = 1$. Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3\mathrm{i})^n}{n^2}$ konvergiert also für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3\mathrm{i}| < 1$ und divergiert für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3\mathrm{i}| > 1$. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3\mathrm{i}| = 1$ gilt

$$\left|\frac{(z+3\mathrm{i})^n}{n^2}\right| = \frac{|z+3\mathrm{i}|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wegen der Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3\mathrm{i})^n}{n^2}$ für $|z+3\mathrm{i}| = 1$ nach dem Majorantenkriterium konvergent. Also konvergiert die Reihe genau für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3\mathrm{i}| \le 1$. $\square$

**Aufgabe 7**

Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme die folgenden Formeln für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

a) $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$.

b) $\cos(2z) = 1 - 2\sin^2(z) = 2\cos^2(z) - 1$.

c) $\sin(z) + \sin(w) = 2\sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\cos\left(\frac{z-w}{2}\right)$.

*Lösungsvorschlag.*

a) Das Additionstheorem $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$ liefert für jedes $z \in \mathbb{C}$ die Identität

$$\sin(2z) = \sin(z+z) = \sin(z)\cos(z) + \cos(z)\sin(z) = 2\sin(z)\cos(z).$$

b) Ebenso folgt aus $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$ die Gleichung

$$\cos(2z) = \cos(z+z) = \cos(z)\cos(z) - \sin(z)\sin(z) = \cos^2(z) - \sin^2(z).$$

Aus der Formel $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ folgt somit sowohl

$$\cos^2(z) - \sin^2(z) = (1 - \sin^2(z)) - \sin^2(z) = 1 - 2\sin^2(z)$$

als auch

$$\cos^2(z) - \sin^2(z) = \cos^2(z) - (1 - \cos^2(z)) = 2\cos^2(z) - 1.$$

c) Aus den Additionstheoremen folgt

$$\sin\left(\frac{z+w}{2}\right) = \sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right) + \cos\left(\frac{z}{2}\right)\sin\left(\frac{w}{2}\right)$$

und

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{z \pm w}{2}\right) &= \cos\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\pm\frac{w}{2}\right) - \sin\left(\frac{z}{2}\right)\sin\left(\pm\frac{w}{2}\right)\\ &= \cos\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right) \mp \sin\left(\frac{z}{2}\right)\sin\left(\frac{w}{2}\right).\end{aligned}$$

Wir erhalten schließlich

$$
\begin{aligned}
&2\sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\cos\left(\frac{z-w}{2}\right)\\
&\quad= 2\left(\sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right)+\cos\left(\frac{z}{2}\right)\sin\left(\frac{w}{2}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right)+\sin\left(\frac{z}{2}\right)\sin\left(\frac{w}{2}\right)\right)\\
&\quad= 2\sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{z}{2}\right)\cos^2\left(\frac{w}{2}\right)+2\sin\left(\frac{w}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right)\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)\\
&\qquad+2\sin\left(\frac{w}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right)\cos^2\left(\frac{z}{2}\right)+2\sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{z}{2}\right)\sin^2\left(\frac{w}{2}\right)\\
&\quad= 2\sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{z}{2}\right)\left(\sin^2\left(\frac{w}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{w}{2}\right)\right)\\
&\qquad+2\sin\left(\frac{w}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right)\left(\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{z}{2}\right)\right)\\
&\quad= \sin(z)+\sin(w). \qquad \square
\end{aligned}
$$