Karlsruher Institut für Technologie

21. November 2019
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

6. Übungsblatt

Am 29. November 2019 findet die Übung im Egon-Eiermann-Hörsaal (Geb. 20.40) statt.

Aufgabe 1 (Wahr oder falsch?)
Seien $D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

a) W □ F □ $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in D\colon\ |f_n(x) - f_{n+1}(x)| \le 2^{-n} \implies (f_n)$ konvergiert punktweise.

b) W □ F □ $D = [0,1], \forall\, n \in \mathbb{N}\colon f_n$ stetig, f stetig, $f_n \to f$ punktweise $\implies f_n \to f$ gleichmäßig.

c) W □ F □ $D = (0,1), \forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall x \in D\colon f_{n+1}(x) \le f_n(x),\ f_n \to f$ punktweise $\implies f_n \to f$ gleichmäßig.

d) W □ F □ $D = (0,\infty), \forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall x \in D\colon f_{n+1}(x) \le f_n(x)$ und $|f_n(x)| \le 1,\ f_n \to f$ punktweise $\implies f_n \to f$ gleichmäßig.

Aufgabe 2

a) Es sei

$$b(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{für } x \in [-1,0], \\ 1 - x, & \text{für } x \in (0,1], \\ 0, & \text{für } x < -1 \text{ oder } x > 1. \end{cases}$$

Wir definieren $f_n(x) = b(x-n)$ und $g_n(x) = \frac{f_n(x)}{n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $x \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie die Funktionenfolgen (f_n) und (g_n) auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

b) Sei $h_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,\infty)$. Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge (h_n) punktweise konvergiert. Untersuchen Sie die Funktionenfolge (h_n) auf gleichmäßgie Konvergenz auf den Mengen $[0,\infty)$, $(0,\infty)$ und $[a,\infty)$ für ein $a > 0$.

Aufgabe 3
Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen und -reihen jeweils auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz auf den angegebenen Teilmengen von $\mathbb{R}$.

a) Sei $a \in [0,1)$. $f_n(x) = \sqrt[n]{n^2 x}$ für $x \in [a,1]$ und $n \in \mathbb{N}$.

b) $f_n(x) = \frac{n^2 x}{1+n^5x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

c) $f_n(x) = nx(1-x)^n$ für $x \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$.

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, wobei $f_n(x) = x^n(1-x)$ für $x \in (-1,1]$ und $n \in \mathbb{N}$.

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, wobei $f_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = x$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ unstetig ist.

(ii) Zeigen Sie, dass f in 0 stetig ist.

b) Bestimmen Sie jeweils alle Stellen, in denen die Funktion f stetig ist.

(i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ für $x \notin \{1,3\}$, $f(1) = \frac{1}{2}$ und $f(3) = 0$.

(ii) $f\colon [-7,3] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \min\{x^2+2x-15,\ x^3\}, & \text{für } x \in [-7,-5] \cup [-1,3], \\ x+5, & \text{für } x \in (-5,-1). \end{cases}$$

Aufgabe 5

a) Berechnen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{8x^3+2x^2+1}{2x^3+7x}$,

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3-9x^2+16x-4}{3x^3-10x^2+9x-2}$,

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}$,

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\sin(x)}-1}{x}$.

b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Geben Sie die Stetigkeitsstellen der Funktion f an.

(i) $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x^2-4)(x-1)}, & \text{für } x \in [0,1), \\ a, & \text{für } x = 1. \end{cases}$

(ii) $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{|x|} + \sqrt{\frac{1}{|x|}}} - \sqrt{\frac{1}{|x|} - \sqrt{\frac{1}{|x|}}}, & \text{für } x \neq 0, \\ a, & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Aufgabe 6

Seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie die folgende Aussagen.

a) Sei x_0 Häufungspunkt von D. Dann gilt: f ist stetig in $x_0 \iff \displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

b) Sei x_0 Häufungspunkt von $D \cap (x_0,\infty)$ und von $(-\infty,x_0) \cap D$. Dann gilt:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \text{ existiert} \iff a := \lim_{x\to x_0+0} f(x),\ b := \lim_{x\to x_0-0} f(x) \text{ existieren und } a = b.$$

Modulprüfung

Die Klausur *Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik* findet am **20. Februar 2020** von **11–13 Uhr** statt. Die Anmeldung ist ab sofort im Campus Management Portal möglich. Der **Anmeldeschluss** ist am **9. Februar 2020**. Die **Hörsaalverteilung** wird ab 13. Februar 2020 durch Aushang am Brett neben dem Zimmer 2.027 (Geb. 20.30) bekanntgegeben.