Karlsruher Institut für Technologie

29. November 2019
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschlag zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 1

Seien $D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$.

W F
■ □ $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in D\colon\ |f_n(x) - f_{n+1}(x)| \le 2^{-n} \Longrightarrow (f_n)$ konvergiert punktweise.

Die Aussage ist richtig. Sei $x \in D$. Für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m \ge n$ gilt nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{m-n-1} f_{n+k+1}(x) - f_{n+k}(x) \right| \\ &\le \sum_{k=0}^{m-n-1} |f_{n+k+1}(x) - f_{n+k}(x)| \\ &\le \sum_{k=0}^{m-n-1} 2^{-n-k} \le 2^{-n+1}. \end{aligned}$$

Also ist $(f_n(x))$ eine Cauchyfolge. Daraus folgt die Konvergenz der Folge $(f_n(x))$. Die Funktionenfolge (f_n) ist daher punktweise konvergent.

W F
□ ■ $D = [0,1], \forall n \in \mathbb{N}\colon f_n$ stetig, f stetig, $f_n \to f$ punktweise $\Longrightarrow f_n \to f$ gleichmäßig.

Die Aussage ist falsch. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge 2$ setzen wir

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & \text{für } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 2 - nx, & \text{für } x \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \\ 0, & \text{für } x \in (\frac{2}{n}, 1], \end{cases}$$

sowie $f_1 = 0$ und $f = 0$. Es gilt $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, somit folgt $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = f(0)$. Sei $x \in (0,1]$. Es gilt $f_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge \frac{2}{x}$. Somit folgt auch $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Damit konvergiert die Folge (f_n) punktweise gegen f. Es gilt jedoch $f_n(\frac{1}{n}) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge 2$. Daher konvergiert (f_n) nicht gleichmäßig gegen f.

W F
□ ■ $D = (0,1), \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in D\colon f_{n+1}(x) \le f_n(x),\ f_n \to f$ punktweise $\Longrightarrow f_n \to f$ gleichmäßig.

Die Aussage ist falsch. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $f_n(x) = \frac{1}{nx}$ für $x \in (0,1)$, sowie $f = 0$. Sei $x \in (0,1)$. Es gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx} = 0 = f(x)$ und $f_n(x) = \frac{1}{nx} \ge \frac{1}{(n+1)x} = f_{n+1}(x)$. Wegen $f_n(\frac{1}{n}) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, konvergiert (f_n) jedoch nicht gleichmäßig gegen f.

W F
□ ■ $D = (0,\infty), \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in D\colon f_{n+1}(x) \le f_n(x)$ und $|f_n(x)| \le 1,\ f_n \to f$ punktweise $\Longrightarrow f_n \to f$ gleichmäßig.

Die Aussage ist falsch. Wir betrachten die Funktion $s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$s(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \in [0,\infty), \\ 0, & \text{für } x \in (-\infty, 0), \end{cases}$$

und wir definieren für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch $f_n(x) = s(x-n)$ für $x \in [0,\infty)$. Außerdem setzen wir $f = 0$. Sei $x \in [0,\infty)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq x$ gilt $f_n(x) = 0$. Also konvergiert die Funktionenfolge (f_n) punktweise gegen f. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt ferner $|f_n(x)| \leq 1$ und $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$. Trotzdem konvergiert die Funktionenfolge (f_n) nicht gleichmäßig gegen f, da $f_n(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 2

a) Es sei
$$b(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{für } x \in [-1,0], \\ 1-x, & \text{für } x \in (0,1], \\ 0, & \text{für } x < -1 \text{ oder } x > 1. \end{cases}$$
Wir definieren $f_n(x) = b(x-n)$ und $g_n(x) = \frac{f_n(x)}{n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $x \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie die Funktionenfolgen (f_n) und (g_n) auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

b) Sei $h_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,\infty)$. Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge (h_n) punktweise konvergiert. Untersuchen Sie die Funktionenfolge (h_n) auf gleichmäßgie Konvergenz auf den Mengen $[0,\infty)$, $(0,\infty)$ und $[a,\infty)$ für ein $a > 0$.

Lösungsvorschlag.

a) Wir setzen $f = 0$. Sei $x \in (-\infty,-1)$. Es gilt $f_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $x \in [-1,\infty)$. Dann gilt $f_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x+1$. Somit gilt, dass (f_n) und somit auch (g_n) auf $\mathbb{R}$ punktweise gegen f konvergieren. Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert jedoch nicht gleichmäßig gegen f, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $f_n(n) = 1$. Die Folge (g_n) jedoch konvergiert gleichmäßig gegen f. Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt
$$|g_n(x) - 0| = \left|\frac{b(x-n)}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$$
für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die gleichmäßige Konvergenz ergibt sich nun aus Satz 7.18 (1).

b) Es gilt $h_n(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $x \in (0,\infty)$. Es gilt
$$h_n(x) = \frac{n^{-1}}{n^{-1}+x}.$$
für jedes $n \in \mathbb{N}$. Somit konvergiert (h_n) punktweise gegen die Grenzfunktion $h\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x = 0, \\ 0, & \text{für } x \in (0,\infty). \end{cases}$$
Die Funktion h ist nicht stetig. Nach Satz 8.3 konvergiert folglich (h_n) nicht gleichmäßig gegen h. Auch auf $(0,\infty)$ ist die Konvergenz nicht gleichmäßig, da

$h_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Sei $a > 0$. Auf $[a, \infty)$ ist die Konvergenz jedoch gleichmäßig. Sei dazu $x \in [a, \infty)$. Es gilt

$$|h_n(x) - 0| = \left| \frac{1}{1+nx} \right| \leq \frac{1}{1+na} = \frac{n^{-1}}{n^{-1}+a}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die gleichmäßige Konvergenz folgt wiederum aus Satz 7.18 (1). $\square$

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen und -reihen jeweils auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz auf den angegebenen Teilmengen von $\mathbb{R}$.

a) Sei $a \in [0, 1)$. $f_n(x) = \sqrt[n]{n^2 x}$ für $x \in [a, 1]$ und $n \in \mathbb{N}$.

b) $f_n(x) = \frac{n^2 x}{1+n^5 x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

c) $f_n(x) = nx(1-x)^n$ für $x \in [0, 1]$ und $n \in \mathbb{N}$.

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, wobei $f_n(x) = x^n(1-x)$ für $x \in (-1, 1]$ und $n \in \mathbb{N}$.

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, wobei $f_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Lösungsvorschlag.

a) Sei zunächst $a \in (0, 1)$. Wir setzen in diesem Fall $h\colon [a, 1] \to \mathbb{R}$, $h = 0$. Sei $x \in [a, 1]$. Dann gilt

$$h_n(x) = \sqrt[n]{n^2 x}$$

und wir erhalten $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) = 0$. Also konvergiert (h_n) punktweise gegen h. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt ferner, dass

$$\begin{aligned} |h_n(x) - 1| &= \left| \sqrt[n]{n^2 x} - 1 \right| \\ &= \left| \sqrt[n]{n^2 x} - \sqrt[n]{n^2 a} + \sqrt[n]{n^2 a} - 1 \right| \\ &\leq \left| \sqrt[n]{n^2 x} - \sqrt[n]{n^2 a} \right| + \left| \sqrt[n]{n^2 a} - 1 \right| \\ &\leq \sqrt[n]{n^2} - \sqrt[n]{n^2 a} + \left| \sqrt[n]{n^2 a} - 1 \right| =: \alpha_n. \end{aligned}$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, ist die Funktionenfolge (h_n) gleichmäßig konvergent nach Satz 7.18 (1).

Sei nun $a = 0$. Es gilt $h_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit der gleichen Rechnung wie oben gilt $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 1$ für $x \in (0, 1]$. Deshalb konvergiert die Funktionenfolge (h_n) in diesem Fall punktweise gegen die Funktion $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$, die durch

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x = 0, \\ 1, & \text{für } x \in (0, 1], \end{cases}$$

erklärt ist. Weil h nicht stetig in 0 ist, ist die Konvergenz nicht gleichmäßig nach Satz 8.3.

b) Sei $x \in \mathbb{R}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|f_n(x)| = \left| \frac{n^2 x}{1 + n^5 x^2} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{n^{5/2}|x|}{1 + n^5 x^2} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1 + n^5 x^2}{2(1 + n^5 x^2)} =: \alpha_n,$$

wobei wir die für jedes $x \in \mathbb{R}$ gültige Ungleichung $2|x| \leq 1 + x^2$ verwendet haben. Da $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ gilt, konvergiert die Folge (f_n) gleichmäßig gegen 0 für $n \to \infty$.

c) Es gilt $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $x \in (0, 1]$. Dann ist $q := 1 - x \in [0, 1)$ und wir erhalten

$$f_n(x) = nxq^n.$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\lim\limits_{n\to\infty} nxq^n = 0$ gilt. Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert also punktweise gegen die Funktion $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f = 0$.

Es liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor. Es gilt nämlich

$$f_n(\tfrac{1}{n}) = n \cdot \tfrac{1}{n} \cdot (1 - \tfrac{1}{n})^n = (1 - \tfrac{1}{n})^n$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Nach Aufgabe 4 h), Blatt 3, erhalten wir $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\frac{1}{n}) = \mathrm{e}^{-1}$. Also gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $f_n(\frac{1}{n}) > \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt. Daher konvergiert die Folge (f_n) nicht gleichmäßig gegen f.

d) Setzt man $x = 1$ in $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ ein, so ergibt sich der Wert 0. Für jedes $x \in (-1, 1)$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1 - x) = (1 - x)\sum_{n=1}^{\infty} x^n = (1 - x)x\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x(1 - x)}{1 - x} = x.$$

Die Funktionenreihe konvergiert also punktweise gegen die Funktion $f : (-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x = 1, \\ x, & \text{für } x \in (-1, 1). \end{cases}$$

Da diese Funktion unstetig, die Partialsummenfunktionen $s_N : (-1, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $s_N(x) := \sum_{n=1}^{N} x^n(1 - x)$ jedoch stetig sind, liegt nach Satz 8.3 keine gleichmäßige Konvergenz vor.

Bemerkung. Auch auf dem Intervall $(-1, 1)$ liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor: Für jedes $N \in \mathbb{N}$ und $x \in (-1, 1)$ gilt

$$\left|s_N(x) - f(x)\right| = \left|(1 - x)x\sum_{n=0}^{N-1} x^n - x\right| = \left|(1 - x)x\frac{1 - x^N}{1 - x} - x\right| = |x|^{N+1}$$

sowie

$$|x|^{N+1} \geq \frac{1}{2} \iff |x| \geq \frac{1}{\sqrt[N+1]{2}}.$$

Obige Rechnung zeigt: Ist $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gesetzt, dann finden wir zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein $x \in (-1, 1)$ (etwa $x = \frac{1}{\sqrt[N+1]{2}}$) so, dass $|s_N(x) - f(x)| \geq \varepsilon$ gilt. Dies schließt gleichmäßige Konvergenz aus.

e) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ haben wir

$$\left|\frac{1}{x^2+n^2}\right| = \frac{1}{x^2+n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Da die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, folgt nach Satz 7.18 (2), dass die Funktionenreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ gleichmäßig und somit auch punktweise auf $\mathbb{R}$ konvergiert. $\square$

Aufgabe 4

a) Die Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = x$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ unstetig ist.

(ii) Zeigen Sie, dass f in 0 stetig ist.

b) Bestimmen Sie jeweils alle Stellen, in denen die Funktion f stetig ist.

(i) $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ für $x \notin \{1, 3\}$, $f(1) = \frac{1}{2}$ und $f(3) = 0$.

(ii) $f \colon [-7, 3] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \min\{x^2+2x-15,\, x^3\}, & \text{für } x \in [-7,-5] \cup [-1,3], \\ x+5, & \text{für } x \in (-5,-1). \end{cases}$$

Lösungsvorschlag.

a) (i) Wir zeigen, dass f weder auf $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, noch auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig ist.

Sei $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $x_n := x + \frac{\sqrt{2}}{n}$. Wegen $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ und $f(x_n) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0 \neq x = f(x)$. Infolgedessen ist f nicht stetig in x. Da $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ beliebig war, ist f nicht stetig auf $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Wie wir aus der Vorlesung wissen, gibt es eine Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen mit $q_n \xrightarrow{n\to\infty} x$. Dann gilt $f(q_n) = q_n \xrightarrow{n\to\infty} x \neq 0 = f(x)$. Infolgedessen ist f nicht stetig in x. Da $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ beliebig war, ist f nicht stetig auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(ii) Setze $x_0 := 0$. Wegen $x_0 \in \mathbb{Q}$ gilt $f(x_0) = x_0 = 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir müssen begründen, dass es ein $\delta > 0$ so gibt, dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt. Wir wählen $\delta = \varepsilon > 0$. Dann folgt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x)| = \begin{cases} |x|, & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \leq |x| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

Das war zu zeigen.

b) (i) Die rationale Funktion $x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ ist nach einem Beispiel der Vorlesung außerhalb der Nullstellenmenge des Nenners stetig. Wegen $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ verschwindet der Nenner für $x = 1$ oder $x = 3$. Daher ist $x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ stetig, so dass auch f auf $\mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ stetig ist. Nun gilt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$

$$f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x-2}{x-3}.$$

Somit ist $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{1-2}{1-3} = \frac{1}{2} = f(1)$, d.h., f ist in 1 stetig. Da 3 eine Nullstelle des Nenners und keine Nullstelle des Zählers von $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ ist, existiert der Grenzwert $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ nicht. Also ist f in 3 unstetig. Insgesamt ist also f auf $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ stetig.

(ii) Wegen $x^2 + 2x - 15 = (x-3)(x+5)$ ist dieser Ausdruck für $x \in [-7, -5]$ nichtnegativ, x^3 hingegen negativ, also gilt $f(x) = x^3$ für $x \in [-7, -5]$. Für $x \in [-1, 0)$ ist $x^3 \in [-1, 0)$, aber $x^2 + 2x - 15 \le 1 + 0 - 15 = -14$, also gilt $f(x) = x^2 + 2x - 15$ für $x \in [-1, 0)$. Für $x \in [0, 3]$ ist $(x-3)(x+5) \le 0$ und $x^3 \ge 0$, also gilt $f(x) = x^2 + 2x - 15$ für $x \in [0, 3]$. Das Minimum zweier stetiger Funktionen g und h ist als Komposition stetiger Funktionen stetig, da man die Formel $\min\{g, h\} = \frac{g+h-|g-h|}{2}$ hat. Daher ist f jedenfalls außerhalb von $\{-5, -1\}$ stetig. Wegen

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to -1-} x + 5 = 4 \neq -16 = \lim_{x\to -1+} x^2 + 2x - 15 = \lim_{x\to -1+} f(x)$$

ist f in -1 unstetig. Da x^3 und $x + 5$ an der Stelle -5 verschieden sind, erhält man entsprechend, dass f nicht stetig in -5 ist. $\square$

Aufgabe 5

a) Berechnen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte.

(i) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{8x^3 + 2x^2 + 1}{2x^3 + 7x}$,

(ii) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 9x^2 + 16x - 4}{3x^3 - 10x^2 + 9x - 2}$,

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+x} - 2}{x}$,

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin(x)} - 1}{x}$.

b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Geben Sie die Stetigkeitsstellen der Funktion f an.

(i) $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x^2-4)(x-1)}, & \text{für } x \in [0, 1), \\ a, & \text{für } x = 1. \end{cases}$

(ii) $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{|x|} + \sqrt{\frac{1}{|x|}}} - \sqrt{\frac{1}{|x|} - \sqrt{\frac{1}{|x|}}}, & \text{für } x \neq 0, \\ a, & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Lösungsvorschlag.

a) (i) Mit dem gleichen Standardtrick wie bei Folgen erhalten wir, dass dieser Grenzwert existiert und dass gilt

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{8x^3+2x^2+1}{2x^3+7x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8+2x^{-1}+x^{-3}}{2+7x^{-2}}=\frac{8+0+0}{2+0}=4.$$

(ii) Zähler und Nenner haben 2 als Nullstelle. Polynomdivision liefert

$$\begin{aligned}x^3-9x^2+16x-4&=(x-2)(x^2-7x+2),\\3x^3-10x^2+9x-2&=(x-2)(3x^2-4x+1).\end{aligned}$$

Sofern die Ausdrücke definiert sind, gilt also

$$\frac{x^3-9x^2+16x-4}{3x^3-10x^2+9x-2}=\frac{(x-2)(x^2-7x+2)}{(x-2)(3x^2-4x+1)}=\frac{x^2-7x+2}{3x^2-4x+1}.$$

Weiter ist 2 keine Nullstelle von $3x^2-4x+1$. Wir schließen, dass der gesuchte Grenzwert existiert und durch

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-9x^2+16x-4}{3x^3-10x^2+9x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-7x+2}{3x^2-4x+1}=-\frac{8}{5}$$

gegeben ist.

(iii) Wir setzen zur Abkürzung $a:=\sqrt[3]{8+x}$ und $b:=2$ und erhalten die Darstellung

$$\sqrt[3]{8+x}-2=a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}=\frac{x}{(\sqrt[3]{8+x}\,)^2+2\sqrt[3]{8+x}+4}.$$

Folglich erhalten wir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{1}{(\sqrt[3]{8+x})^2+2\sqrt[3]{8+x}+4}\\&=\frac{1}{(\sqrt[3]{8})^2+2\sqrt[3]{8}+4}=\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

(iv) Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots)-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\ldots}{1}=1.\end{aligned}$$

Nun betrachten wir

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+-\ldots}{x}=\lim_{x\to0}1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+-\ldots=1.$$

Aus $\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ folgt insbesondere $\sin(x)\neq0$ in der Nähe von 0. Für jede Folge (x_n) mit $x_n\to0$ und $x_n\neq0$ hat man also $\sin(x_n)\to0$ (da der Sinus stetig ist) und $\sin(x_n) \neq 0$ für fast alle n. Daher folgt mit $\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$, dass

$$\frac{e^{\sin x_n} - 1}{\sin x_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1\,, \qquad \text{also} \qquad \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \xrightarrow{x\to 0} 1.$$

Nach den Grenzwertsätzen existiert der zu untersuchende Grenzwert und es gilt

$$1 = \left(\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}.$$

b) (i) Die Funktion f ist als Komposition stetiger Funktionen (ohne Nullstellen im Nenner) auf $[0, 1)$ stetig. Sei $x \in [0, 1)$. Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x^2-4)(x-1)} \\ &= \frac{1}{x-1} \cdot \left(1 + \frac{3}{(x^2-4)}\right) \\ &= \frac{1}{x-1} \cdot \frac{(x^2-4)+3}{(x^2-4)} \\ &= \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{(x^2-4)} \\ &= \frac{1}{x-1} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{(x^2-4)} \\ &= \frac{x+1}{(x^2-4)} \end{aligned}$$

Folglich ist f für $a = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{(x^2-4)} = -\frac{2}{3}$ auf ganz $[0, 1]$ stetig und für $a \neq -\frac{2}{3}$ nur auf $[0, 1)$.

(ii) Die Funktion f ist als Komposition stetiger Funktionen (ohne Nullstellen im Nenner) auf $[-1, 1] \setminus \{0\}$ stetig. Sei $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ und definiere $y = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{1}{|x|} + \sqrt{\frac{1}{|x|}}} - \sqrt{\frac{1}{|x|} - \sqrt{\frac{1}{|x|}}} \\ &= \sqrt{y^2 + y} - \sqrt{y^2 - y} \\ &= \frac{y^2 + y - (y^2 - y)}{\sqrt{y^2 + y} + \sqrt{y^2 - y}} \\ &= \frac{2y}{y\left(\sqrt{1 + \frac{1}{y}} + \sqrt{1 - \frac{1}{y}}\right)} \\ &= \frac{2}{\left(\sqrt{1 + \sqrt{|x|}} + \sqrt{1 - \sqrt{|x|}}\right)}. \end{aligned}$$

Folglich ist die Funktion f für

$$a = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\left(\sqrt{1+\sqrt{|x|}} + \sqrt{1-\sqrt{|x|}}\right)} = 1$$

auf $[-1,1]$ stetig und für $a \neq 1$ nur auf $[-1,1] \setminus \{0\}$. □

Aufgabe 6
Seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie die folgende Aussagen.

a) Sei x_0 Häufungspunkt von D. Dann gilt: f ist stetig in $x_0 \iff \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

b) Sei x_0 Häufungspunkt von $D \cap (x_0,\infty)$ und von $(-\infty,x_0) \cap D$. Dann gilt:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \text{ existiert} \iff a := \lim_{x\to x_0+0} f(x),\ b := \lim_{x\to x_0-0} f(x) \text{ existieren und } a = b.$$

Lösungsvorschlag.

a) Sei f stetig in x_0. Sei (x_n) Folge in $D \setminus \{0\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Aufgrund der Stetigkeit von f folgt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Es folgt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Umgekehrt gelte $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Sei (x_n) Folge in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Wir zerlegen (x_n) in zwei Teilfolgen. Dazu setzen wir $N_1 = \{n \in \mathbb{N} : x_n = x_0\}$ und $N_2 = \mathbb{N} \setminus N_1$. Wenn N_1 unendlich ist, dann ist klar, dass die Teilfolge $(f(x_n))_{n\in N_1}$ gegen $f(x_0)$ konvergiert. Wenn N_2 unendlich ist, dann ist $(x_n)_{n\in N_2}$ eine Folge in $D\setminus\{x_0\}$. Wegen der Voraussetzung $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ folgt daher, dass $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}_2}$ gegen $f(x_0)$ konvergiert. Wir erhalten damit insgesamt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ und es folgt die Behauptung.

b) Es existiere $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Die Existenz und Gleichheit der einseitigen Grenzwerte folgt direkt aus deren Definition.

Umgekehrt existieren die einseitigen Grenzwerte $a = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, sowie $b = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ und es gelte $a = b$. Sei (x_n) eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$. Setze $N_1 = \{n \in \mathbb{N} : x_n < x_0\}$ und $N_2 = \{n \in \mathbb{N} : x_n > x_0\}$. Die Behauptung folgt durch Argumentation analog wie in Teil a). □