Karlsruher Institut für Technologie

28. November 2019
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

7. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Wahr oder falsch?)

Sei $x \in \mathbb{R}$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

	W	F	
a)	☐	☐	$\sqrt{x^2} = x$.
b)	☐	☐	$\log(\mathrm{e}^x) = x$.
c)	☐	☐	$\mathrm{e}^{x\log(x)} = x^x$.
d)	☐	☐	$\tan(\arctan(x)) = x$.
e)	☐	☐	$\arcsin(\sin(x)) = x$.
f)	☐	☐	$\log(\sqrt{1+x^2}) = \frac{1}{2}\log(1+x^2)$.

Aufgabe 2

Sei $a > 0$. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$,

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\log(x)}{x-1}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + \arcsin(x)\right)^{\frac{1}{x}}$,

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$,

e) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cos(\arctan(x))$.

Hinweis. Zeigen für Teil e) die Identität $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$ für alle $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Aufgabe 3

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Es gelte $f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \geq 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass die Folge (f_n) gleichmäßig gegen 0 konvergiert. Vergleichen Sie mit Aufgabe 1 b)–d), Blatt 6.

Aufgabe 4

Die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{für } x \in [-1,1] \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Bestimmen Sie den Wertebereich $f([-1,1])$ von f.

c) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion besitzt. Berechnen Sie f^{-1}.

d) Zeigen Sie, dass f^{-1} und f streng monoton wachsende Funktionen sind.

Aufgabe 5

a) Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) > g(a)$ und $f(b) < g(b)$. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in (a,b)$ existiert mit $f(x_0) = g(x_0)$.

b) Zeigen Sie die Existenz einer Lösung $x_0 \geq 0$ von

$$\frac{1}{1+x^2} = \sqrt{x}.$$

c) Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie die Existenz von $x_1 \in [0, \frac{1}{2}]$ mit der Eigenschaft
$$f(x_1) = f\left(\tfrac{1}{2} + x_1\right).$$

Aufgabe 6

a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$
Zeigen Sie, dass es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt mit $|f(x)| \leq |f(x_0)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte $f(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt. Zeigen Sie, dass die Funktion $1/f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt ist.

Aufgabe 7

a) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y, x+y \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie
$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}.$$

b) Zeigen Sie
$$\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \tfrac{1}{2}.$$

Aufgabe 8

a) Sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie
$$\arg(z) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & y \geq 0, \\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & y < 0. \end{cases}$$

b) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Argument von
$$\left(\tfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^{201}.$$

c) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von z^3 und z^{150} für $z = \cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}$.

d) Geben Sie Betrag und Argument von $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ für $t \in (0, 2\pi)$ an.

Modulprüfung

Die Klausur *Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik* findet am **20. Februar 2020** von **11–13 Uhr** statt. Die Anmeldung ist ab sofort im Campus Management Portal möglich. Der **Anmeldeschluss** ist am **9. Februar 2020**. Die **Hörsaalverteilung** wird ab 13. Februar 2020 durch Aushang am Brett neben dem Zimmer 2.027 (Geb. 20.30) bekanntgegeben.

Eine Information Ihrer Fachschaft.

https://fachschaft.physik.kit.edu/drupal/content/mentorenprogramm-ws-1920