Karlsruher Institut für Technologie

5. Dezember 2019
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschlag zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Wahr oder falsch?)
Sei $x \in \mathbb{R}$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

W F
☐ ■ $\sqrt{x^2} = x$. Setze $x = -1$.

W F
■ ☐ $\log(\mathrm{e}^x) = x$.

W F
☐ ■ $\mathrm{e}^{x\log(x)} = x^x$. Setze $x = 0$.

W F
■ ☐ $\tan(\arctan(x)) = x$.

W F
☐ ■ $\arcsin(\sin(x)) = x$. Setze $x = \pi$.

W F
■ ☐ $\log(\sqrt{1+x^2}) = \frac{1}{2}\log(1+x^2)$.

Aufgabe 2
Sei $a > 0$. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$,

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\log(x)}{x-1}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \arcsin(x))^{\frac{1}{x}}$,

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$,

e) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cos(\arctan(x))$.

Hinweis. Zeigen für Teil e) die Identität $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$ für alle $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Lösungsvorschlag.

a) Sei $a \neq 1$. Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{\mathrm{e}^{x\log(a)} - 1}{x} = \log(a)\frac{\mathrm{e}^{x\log(a)} - 1}{x\log(a)}.$$

Der Grenzwert $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\mathrm{e}^y - 1}{y} = 1$ ist aus der Vorlesung bekannt. Außerdem gilt $\lim\limits_{x\to 0} x\log(a) = 0$. Mit Satz 8.5 folgt daher

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log(a)\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x\log(a)} - 1}{x\log(a)} = \log(a).$$

Im Fall $a = 1$ erhält man direkt $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$.

b) Es gilt $\lim\limits_{y\to 0} \mathrm{e}^y = 0$. Mit $x = \mathrm{e}^y$ und Satz 8.5 folgt daher

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(x)}{x-1} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\mathrm{e}^y - 1} = 1,$$

wobei der letzte Grenzwert wie in Teil a) verwendet wird.

c) Sei $x \in (0, \infty)$. Es gilt

$$\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} = \mathrm{e}^{(x+1)\log\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)}.$$

Betrachten wir nun den Exponenten der rechten Seite, sehen wir, dass

$$(x+1)\log\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right) = (x+1)\frac{2}{2x+1}\frac{\log\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)}{\frac{2}{2x+1}} = \frac{2+\frac{2}{x}}{2+\frac{1}{x}}\frac{\log\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)}{\frac{2}{2x+1}}$$

gilt. Wir erhalten mit Satz 8.5 und Teil b)

$$\lim_{x\to\infty}(x+1)\log\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right) = 1.$$

Wieder mit Satz 8.5 folgt das Ergebnis

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} = \mathrm{e}.$$

d) Sei $x \in (-1, 1)$. Es gilt

$$(1+\arcsin(x))^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\log(1+\arcsin(x))}$$

und

$$\frac{1}{x}\log(1+\arcsin(x)) = \frac{\arcsin(x)}{x}\frac{\log(1+\arcsin(x))}{\arcsin(x)}.$$

Mit $y = \arcsin(x)$ und Satz 8.5 gilt

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin(y)} = 1,$$

wobei wir ein Resultat der Vorlesung verwendet haben. Mit Teil b) erhalten wir insgesamt

$$\lim_{x\to 0}(1+\arcsin(x))^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}.$$

e) Für jedes $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ gilt

$$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}} = |\cos(x)| = \cos(x).$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\arctan(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Daraus folgt

$$x\cos(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+\tan^2(\arctan(x))}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}.$$

Wir erhalten somit $\lim\limits_{x\to\infty} x\cos(\arctan(x)) = 1$. $\square$

Aufgabe 3
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Es gelte $f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \geq 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass die Folge (f_n) gleichmäßig gegen 0 konvergiert. Vergleichen Sie mit Aufgabe 1 b)–d), Blatt 6.

Lösungsvorschlag. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es nach Satz 8.18 $x_n \in [0,1]$ mit $f_n(x_n) = \max\limits_{x\in[0,1]} f_n(x)$. Für alle $x \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$0 \leq f_{n+1}(x) \leq f_{n+1}(x_{n+1}) \leq f_n(x_{n+1}) \leq f_n(x_n).$$

Daher ist die Folge $(f_n(x_n))$ monoton fallend und es reicht zu zeigen, dass $(f_n(x_n))$ eine Nullfolge ist. Wir nehmen an, dass $(f_n(x_n))$ keine Nullfolge ist. Folglich existiert ein $c > 0$ mit $f_n(x_n) \geq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es eine konvergente Teilfolge von (x_n), wir bezeichnen mit $x_0 \in [0,1]$ einen Häufungswert dieser Folge. Nach Voraussetzung gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0$. Also gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f_{n_0}(x_0) \leq \frac{c}{4}$. Da f_{n_0} stetig ist, gibt es $\delta > 0$ mit $f_{n_0}(x) \leq \frac{c}{2}$ für alle $x \in U_\delta(x_0) \cap [0,1]$. Wir erhalten aus der Monotonie der Folge (f_n), dass

$$f_n(x) \leq f_{n_0}(x) \leq \frac{c}{2} \tag{1}$$

für alle $x \in U_\delta(x_0) \cap [0,1]$ und alle $n \geq n_0$ gilt. Andererseits gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $n_1 \geq n_0$ und $x_{n_1} \in U_\delta(x_0) \cap [0,1]$. Wegen $f_{n_1}(x_{n_1}) \geq c$ erhalten wir somit einen Widerspruch zu (1). Damit ist die Annahme falsch, folglich ist die Folge $(f_n(x_n))$ eine Nullfolge. Wir erhalten nun die Behauptung aus Satz 7.18 (1). $\square$

Aufgabe 4
Die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{für } x \in [-1,1] \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Bestimmen Sie den Wertebereich $f([-1,1])$ von f.

c) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion besitzt. Berechnen Sie f^{-1}.

d) Zeigen Sie, dass f^{-1} und f streng monoton wachsende Funktionen sind.

Lösungsvorschlag.

a) Als Komposition stetiger Funktionen ist f auf $[-1,1]\setminus\{0\}$ stetig. Für $x \in [-1,1]\setminus\{0\}$ gilt

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \cdot \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-(1-x^2)}{x(1+\sqrt{1-x^2})} = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}.$$

Demnach gilt $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, und damit ist f auch stetig in 0.

b) Wir zeigen zunächst $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in [-1,1]$. Für $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ gilt mit Teil a)

$$|f(x)| = \frac{|x|}{1+\sqrt{1-x^2}} \leq |x| \leq 1.$$

Wegen $f(0) = 0$ ist $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in [-1,1]$ bewiesen. Hieraus folgt $f([-1,1]) \subset [-1,1]$.

Nun zeigen wir $[-1,1] \subset f([-1,1])$. Sei dazu $y_0 \in [-1,1]$. Dann liegt y_0 zwischen $f(-1) = -1$ und $f(1) = 1$. Aufgrund der Stetigkeit von f existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0 \in [-1,1]$ mit $y_0 = f(x_0) \in \{f(x) : x \in [-1,1]\} = f([-1,1])$. Da $y_0 \in [-1,1]$ beliebig war, folgt $[-1,1] \subset f([-1,1])$. Insgesamt ergibt sich $f([-1,1]) = [-1,1]$.

c) Um die Existenz der Umkehrfunktion von f nachzuweisen, verwenden wir folgendes Resultat: Seien X, Y Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Gelingt es, die Gleichung $y = f(x)$ durch Äquivalenzumformungen (!) in die Form $x = g(y)$ zu bringen (wobei $x \in X$, $y \in Y$ und $g\colon Y \to X$), dann ist f bijektiv und die Umkehrfunktion von f lautet g.

Für $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned}
y = f(x) \quad &\iff \quad y = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \quad \iff \quad 1 - xy = \sqrt{1-x^2} \\
&\overset{1-xy\geq 0}{\iff} \quad 1 - 2xy + x^2y^2 = 1 - x^2 \quad \iff \quad x^2(1+y^2) = 2xy \\
&\overset{x\neq 0}{\iff} \quad x(1+y^2) = 2y \quad \iff \quad x = \frac{2y}{1+y^2}\,.
\end{aligned}$$

Für $x = 0$ gilt $y = f(0) = 0$, also gilt auch hier $x = \frac{2y}{1+y^2}$. Die Rechnung zeigt: f besitzt eine Umkehrfunktion, die durch

$$f^{-1}\colon [-1,1] \to [-1,1], \quad y \mapsto \frac{2y}{1+y^2}$$

gegeben ist.

d) Seien $x_1, x_2 \in [-1,1]$ mit $x_1 < x_2$. Zu zeigen ist $f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$. Dies ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
f^{-1}(x_2) - f^{-1}(x_1) &= \frac{2x_2}{1+x_2^2} - \frac{2x_1}{1+x_1^2} \\
&= \frac{2x_2(1+x_1^2) - 2x_1(1+x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} \\
&= \frac{2(x_2 - x_1 + x_1^2x_2 - x_1x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} \\
&= \frac{2(x_2 - x_1 + x_1x_2(x_1 - x_2))}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} \\
&= \frac{2(x_2 - x_1)(1 - x_1x_2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} > 0,
\end{aligned}$$

denn wegen $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1$, gilt $x_1 x_2 < 1$.

Da f^{-1} die Umkehrfunktion von f ist, ist f die Umkehrfunktion von f^{-1}. Da f^{-1} streng monoton wachsend ist, ist es gemäß Vorlesung auch ihre Umkehrfunktion f. $\square$

Aufgabe 5

a) Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) > g(a)$ und $f(b) < g(b)$. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in (a,b)$ existiert mit $f(x_0) = g(x_0)$.

b) Zeigen Sie die Existenz einer Lösung $x_0 \geq 0$ von

$$\frac{1}{1+x^2} = \sqrt{x}.$$

c) Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie die Existenz von $x_1 \in [0, \frac{1}{2}]$ mit der Eigenschaft

$$f(x_1) = f\left(\tfrac{1}{2} + x_1\right).$$

Lösungsvorschlag.

a) Sei $h := g - f$. Dann ist $h(a) = g(a) - f(a) < 0$, $h(b) = g(b) - f(b) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz (h ist als Komposition der stetigen Funktionen f und g stetig) existiert somit ein $x_0 \in (a,b)$ mit $h(x_0) = g(x_0) - f(x_0) = 0$.

b) Setze $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$, $g(x) := \sqrt{x}$ für jedes $x \in [0, \infty)$. Beide Funktionen sind stetig auf $[0,\infty)$. Zudem gilt $f(0) = 1 > 0 = g(0)$, $f(1) = \frac{1}{2} < 1 = g(1)$. Nach Teil a) existiert also ein $x_0 \in (0,1)$ mit $f(x_0) = \frac{1}{1+x_0^2} = \sqrt{x_0} = g(x_0)$.

c) Setze $g(x) := f(x + \frac{1}{2})$ für jedes $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Dann ist g stetig und es gilt

$$g(0) = f(\tfrac{1}{2}), \qquad g(\tfrac{1}{2}) = f(1) = f(0).$$

Gilt $f(0) = g(0) (= f(\frac{1}{2}))$, so ist die Behauptung gezeigt. Ansonsten ist entweder $f(0) < g(0)$ und somit $f(\frac{1}{2}) = g(0) > f(0) = g(\frac{1}{2})$ oder umgekehrt. In beiden Fällen folgt die Behauptung aus Teil a). $\square$

Aufgabe 6

a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Zeigen Sie, dass es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt mit $|f(x)| \leq |f(x_0)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte $f(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt. Zeigen Sie, dass die Funktion $1/f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt ist.

Lösungsvorschlag.

a) Ist f die Nullfunktion, so ist die Behauptung klar. Andernfalls existiert ein x_1 mit $|f(x_1)| > 0$. Wir definieren $\varepsilon := |f(x_1)|$. Nach Voraussetzung existiert ein $R > 0$ mit

$$|f(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in (-\infty, R] \cup [R, \infty).$$

Die stetige Funktion $|f|$ nimmt auf der kompakten Menge $[-R, R]$ ihr Maximum an, es existiert also ein $x_0 \in [-R, R]$ mit

$$|f(x_0)| = \max_{x \in [-R,R]} |f(x)| \,.$$

Da $x_1 \in [-R, R]$ gilt, ist $|f(x_0)| \geq |f(x_1)| = \varepsilon$ und damit auch

$$|f(x_0)| = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \,,$$

was zu beweisen war.

b) Die stetige Funktion f nimmt auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ ihr Minimum an, das nach Voraussetzung positiv ist, also existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit

$$f(x_0) = \min_{x \in [a,b]} f(x).$$

Damit gilt für die Funktion $1/f$, dass für $x \in [a, b]$

$$0 = \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{f(x_0)} = C < \infty,$$

womit $1/f$ beschränkt ist. $\square$

Aufgabe 7

a) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y, x + y \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}.$$

b) Zeigen Sie

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \tfrac{1}{2}.$$

Lösungsvorschlag.

a) Es gilt mit den Additionstheoremen für den Sinus und Kosinus

$$\begin{aligned}\tan(x + y) = \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} &= \frac{\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)} \\ &= \frac{\cos(x)\cos(y)(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(y)}{\cos(y)})}{\cos(x)\cos(y)(1 - \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\frac{\sin(y)}{\cos(y)})} = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}.\end{aligned}$$

b) Nach Vorlesung gilt $\sin(x), \cos(x) > 0$ für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Durch mehrmaliges Anwenden der Additionstheoreme folgt

$$\begin{aligned} 0 = \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(\tfrac{\pi}{3} + \tfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos\left(\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right) \\ &= \Big(\cos^2\left(\tfrac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\Big)\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right) - 2\sin^2\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\Big(\cos^2\left(\tfrac{\pi}{6}\right) - 3\sin^2\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\Big) \end{aligned}$$

Also folgt $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - 3\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ und wegen $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$ ergibt sich $4\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$, somit $\frac{1}{2} = \left|\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right| = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Aus einer beliebigen der obigen Gleichungen folgt dann auch $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$, also $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Weiterhin folgt

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

und deshalb $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. □

Aufgabe 8

a) Sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie

$$\arg(z) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & y \geq 0, \\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & y < 0. \end{cases}$$

b) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Argument von

$$\left(\tfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^{201}.$$

c) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von z^3 und z^{150} für $z = \cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}$.

d) Geben Sie Betrag und Argument von $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ für $t \in (0, 2\pi)$ an.

Lösungsvorschlag.

a) Die Polardarstellung von z lautet

$$z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(z)} = |z|\cos(\arg(z)) + \mathrm{i}\,|z|\sin(\arg(z)).$$

Insbesondere gilt also $x = |z|\cos(\arg(z))$, also $\frac{x}{|z|} = \cos(\arg(z))$. Das Argument kann nun jedoch zwischen $-\pi$ und π liegen, ganz im Gegensatz zum Arkuskosinus, der nur Werte in $[0, \pi]$ annimmt. Liegt das Argument ebenfalls in diesem Bereich (nämlich für $y \geq 0$), folgt hiermit

$$\arg(z) = \arccos\left(\frac{x}{|z|}\right) = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Liegt das Argument jedoch in $(-\pi, 0)$ (also für $y < 0$), so gilt $-\arg(z) \in (0, \pi)$, weshalb hier

$$\begin{aligned}\arg(z) &= -(-\arg(z)) = -\arccos\left(\cos(-\arg(z))\right) = -\arccos\left(\cos(\arg(z))\right)\\ &= -\arccos\left(\frac{x}{|z|}\right) = -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\end{aligned}$$

gilt. Insgesamt folgt also die Behauptung.

b) Sei $z_\pm = 1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}$. Wegen $|z_\pm| = 2$ gilt nach Teil a)

$$\arg z_\pm = \pm\arccos\frac{1}{2} = \pm\frac{\pi}{3}.$$

Somit gilt

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^{201} = \left(\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}\right)^{201} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right)^{201} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{402\pi}{3}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}134\pi}.$$

Da die Exponentialfunktion $2\pi\mathrm{i}$-periodisch ist, gilt $\mathrm{e}^{\mathrm{i}134\pi} = 1$, also

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^{201} = 1.$$

c) Es gilt $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}$, also (mit der $2\pi\mathrm{i}$-Periodizität der Exponentialfunktion)

$$z^3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{15\pi}{4}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

sowie

$$z^{150} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{750\pi}{4}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = -\mathrm{i}.$$

d) Es gilt

$$1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}) = -2\mathrm{i}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}} = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t-\pi}{2}},$$

wobei im letzten Schritt $-\mathrm{i} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ benutzt wurde. Wegen $2\sin\left(\frac{t}{2}\right) > 0$ und $\frac{t-\pi}{2} \in (-\pi, \pi]$ für $t \in (0, 2\pi)$ ist dies bereits die Polardarstellung. $\square$