Karlsruher Institut für Technologie

5. Dezember 2019
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

8. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

a) W ☐ F ☐ f ist beschränkt.

b) W ☐ F ☐ f' ist stetig.

c) W ☐ F ☐ f' ist beschränkt.

d) W ☐ F ☐ f' ist differenzierbar.

e) W ☐ F ☐ $f' \neq f$.

f) W ☐ F ☐ f injektiv $\Rightarrow \forall\, x \in I : f'(x) \neq 0$.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ auf Differenzierbarkeit und geben Sie wenn möglich die Ableitung an.

a) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|^3,$

b) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{Arsinh}(x)$

c) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = x^5 - 3x^2 + 2x + 17,$

d) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

e) $D = (1, \infty), \quad f(x) = \log(\log(x)),$

f) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(2x)\mathrm{e}^{\sin(x)},$

g) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cosh(x)}},$

h) $D = (0, \infty), \quad f(x) = x^x,$

i) $D = (0, \infty), \quad f(x) = x^{(x^x)},$

j) $D = (0, \pi), \quad f(x) = x^{\sin(x)} \sin(x)^x,$

k) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = \tanh(x),$

l) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = |\sin(x)|.$

Aufgabe 3

Zeigen bzw. berechnen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die folgenden Unlgeichungen bzw. Grenzwerte.

a) $\mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e}^{y^2} \leq (x-y)(x+y)\mathrm{e}^{x^2}$ für alle $x > y > 0$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x \left(\log\left(1 + \sqrt{1+x^2}\right) - \log(x) \right) \right)$.

c) $x\log(x) - y\log(y) \leq (x-y)(1+\log(x))$ für alle $x > y > 0$.

d) $|\log(\cos(x)) - \log(\cos(y))| \leq \sqrt{3}\,|x-y|$ für alle $x, y \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$.

Aufgabe 4
Berechnen Sie im folgenden die Ableitung der Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. $f_\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in allen Punkten des Definitionsbereiches, in denen sie existiert.

a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f_\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(x^{-1}) & \text{für } x \in (0,\infty), \\ 0, & x \in (-\infty, 0]. \end{cases}$$

b) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{5}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x \in (0,\infty), \\ 0, & x \in (-\infty, 0]. \end{cases}$$

c) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{|x|}} - \log(x^4)\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 5

a) Sei $f\colon [-3,2] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ für alle $x \in [-3,2]$ definiert. Begründen Sie, dass f sein Maximum und Minimum annimmt und berechnen Sie diese.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Für eine physikalische Größe werden bei n Messungen die Messwerte $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ bestimmt. Bei der *Methode der kleinsten Quadrate* minimiert man die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2.$$

Zeigen Sie, dass f genau ein Minimum besitzt und berechnen Sie dieses.

Modulprüfung

Die Klausur *Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik* findet am **20. Februar 2020** von **11–13 Uhr** statt. Die Anmeldung ist ab sofort im Campus Management Portal möglich. Der **Anmeldeschluss** ist am **9. Februar 2020**. Die **Hörsaalverteilung** wird ab 13. Februar 2020 durch Aushang am Brett neben dem Zimmer 2.027 (Geb. 20.30) bekanntgegeben.