Karlsruher Institut für Technologie

13. Dezember 2019
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschlag zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

W F
■ □ f ist beschränkt.

Diese Aussage ist richtig. Nach Satz 10.1 ist f stetig, da f differenzierbar ist. Da I ein kompaktes Intervall und f stetig ist, folgt aus Satz 8.18, dass f beschränkt ist.

W F
□ ■ f' ist stetig.

Die Aussage ist falsch. Betrachte f_2 aus Aufgabe 4 a).

W F
□ ■ f' ist beschränkt.

Die Aussage ist falsch. Betrachte $f_{3/2}$ aus Aufgabe 4 a).

W F
□ ■ f' ist differenzierbar.

Die Aussage ist falsch. Betrachte $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,1], \\ -x^2, & x \in [-1,0). \end{cases}$$

Es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (0,1], \\ -2x, & x \in [-1,0) \end{cases}$$

und

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,|x|}{x} = \lim_{x\to 0} |x| = 0.$$

Somit ist f differenzierbar und es gilt $f'(x) = 2\,|x|$ für alle $x \in [-1,1]$. Nach Beispiel 3 am Anfang von § 10 ist jedoch f' nicht differenzierbar.

W F
□ ■ $f' \neq f$.

Die Aussage ist falsch. Betrachte $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \mathrm{e}^x$. Dann gilt $f'(x) = \mathrm{e}^x$ für alle $x \in [0,1]$ und somit $f' = f$.

W F
□ ■ f injektiv $\Rightarrow \forall\, x \in I : f'(x) \neq 0$.

Die Aussage ist falsch. Betrachte $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^3$. Es gilt $f'(0) = 0$, aber f ist injektiv.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ auf Differenzierbarkeit und geben Sie wenn möglich die Ableitung an.

a) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = |x|^3$,

b) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{Arsinh}(x)$

c) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - 3x^2 + 2x + 17$,

d) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

e) $D = (1, \infty)$, $f(x) = \log(\log(x))$,

f) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(2x)\mathrm{e}^{\sin(x)}$,

g) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cosh(x)}}$,

h) $D = (0, \infty)$, $f(x) = x^x$,

i) $D = (0, \infty)$, $f(x) = x^{(x^x)}$,

j) $D = (0, \pi)$, $f(x) = x^{\sin(x)} \sin(x)^x$,

k) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \tanh(x)$,

l) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = |\sin(x)|$.

Lösungsvorschlag. Alle Funktionen bis auf diejenige in Teil a) und l) sind als Koposition differenzierbarer Funktionen (ohne Nullstellen im Nenner) auf ihrem kompletten Definitionsbereich differenzierbar.

a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{für } x \geq 0, \\ -x^3, & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Nach Beispiel (4) nach Satz 10.4 ist f auf $(0, \infty)$ differenzierbar mit $f'(x) = 3x^2$, $x > 0$. Ebenso ist f auf $(-\infty, 0)$ differenzierbar mit $f'(x) = -3x^2$, $x < 0$. Wegen

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \to 0+} x^2 = 0$$

und

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{-x^3}{x} = \lim_{x \to 0-} -x^2 = 0$$

gilt $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$, d.h. f ist in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$. Somit ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{für } x \geq 0, \\ -3x^2 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

b) Wir verwenden die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion. Wegen $\sinh'(x) = \cosh(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\operatorname{Arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\operatorname{Arsinh}'(x) = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{Arsinh}(x))} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{Arsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(\operatorname{Arsinh}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},$$

wobei wir $\cosh^2(y) - \sinh^2(y) = 1$ sowie $\cosh(y) > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ verwendetet haben.

c) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x) = 5x^4 - 6x + 2$ (siehe Beispiel (4) nach Satz 10.4)

d) Nach der Quotientenregel gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$, dass

$$f'(x) = \frac{0 - 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}.$$

e) Nach der Vorlesung ist log differenzierbar und es gilt $\log'(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x > 0$. Es folgt mit der Kettenregel, dass

$$f'(x) = [\log \circ \log]'(x) = (\log' \circ \log)(x) \cdot \log'(x) = \frac{1}{\log(x)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \log(x)} \qquad \forall x > 1$$

f) Mit der Kettenregel gilt $[\exp \circ \sin]' = (\exp' \circ \sin) \cdot \sin' = (\exp \circ \sin) \cdot \cos$. Sei ferner $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = 2x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es folgt wieder mit der Kettenregel $(\cos \circ g)' = (\cos' \circ g) \cdot g' = -2\,(\sin \circ g)$. Mit der Produktregel folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &= [(\cos \circ g) \cdot (\exp \circ \sin)]'(x) \\ &= (\cos \circ g)'(x) \cdot (\exp \circ \sin)(x) + (\cos \circ g)(x) \cdot (\exp \circ \sin)'(x) \\ &= -2\sin(2x)\mathrm{e}^{\sin(x)} + \cos(2x)\cos(x)\mathrm{e}^{\sin(x)} \\ &= (\cos(2x)\cos(x) - 2\sin(2x))\,\mathrm{e}^{\sin(x)} \end{aligned}$$

g) Aus der Vorlesung ist bekannt (Beispiel (7) vor Satz 10.1), dass cosh differenzierbar ist und $\cosh' = \sinh$ gilt. Ebenfalls laut Vorlesung (Beispiel (4) nach Satz 10.4) ist die Abbildung $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ differenzierbar und es gilt $g'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ für alle $x > 0$. Es folgt mit der Kettenregel, dass

$$\begin{aligned} f'(x)\,&(g \circ \cosh)'(x) \\ &= (g' \circ \cosh)(x) \cdot \cosh'(x) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{(\cosh(x))^{\frac{3}{2}}}\right) \cdot \sinh(x) \\ &= -\frac{\sinh(x)}{2\,(\cosh(x))^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

h) Es gilt $f(x) = x^x = \mathrm{e}^{x \log x}$. Sei $g(x) := x\log(x)$. Mit der Ketten- und Produktregel folgt dann für jedes $x > 0$

$$f'(x) = \mathrm{e}^{g(x)}g'(x) = x^x(1 \cdot \log x + x \cdot x^{-1}) = (1 + \log x)x^x.$$

i) Setzt man $g(x) := x^x = \mathrm{e}^{x \log x}$ und $h(x) := g(x)\log(x)$, so ist $f(x) = x^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\log x} = \mathrm{e}^{h(x)}$ für jedes $x > 0$. Mit Teil h) sowie der Ketten- und Produktregel folgt für $x > 0$, dass

$$f'(x) = \mathrm{e}^{h(x)}h'(x) = x^{(x^x)}(g'(x)\log x + g(x)x^{-1}) = x^{(x^x)}\left((1+\log x)x^x \log x + x^{x-1}\right).$$

j) Sei $g\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = x^{\sin(x)} = \mathrm{e}^{\log(x)\sin(x)}$ und $h\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}$ durch $h(x) = \sin(x)^x = \mathrm{e}^{\log(\sin(x))x}$. Mit der Ketten- und Produktregeln folgt

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\exp\circ(\log\cdot\sin))'(x) = (\exp'\circ(\log\cdot\sin))(x)\cdot(\log\cdot\sin)'(x) \\ &= (\exp\circ(\log\cdot\sin))(x)\cdot(\log'\cdot\sin+\log\cdot\sin')(x) \\ &= x^{\sin(x)}\cdot\left(\frac{\sin(x)}{x}+\log(x)\cos(x)\right) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} h'(x) &= (\exp\circ(\log\circ\sin\cdot\mathrm{id}))'(x) = (\exp'\circ(\log\circ\sin\cdot\mathrm{id}))(x)\cdot(\log\circ\sin\cdot\mathrm{id})'(x) \\ &= (\exp\circ(\log\circ\sin\cdot\mathrm{id}))(x)\cdot((\log\circ\sin)'\cdot\mathrm{id}+(\log\circ\sin)\cdot\mathrm{id}')(x) \\ &= (\exp\circ(\log\circ\sin\cdot\mathrm{id}))(x)\cdot((\log'\circ\sin\cdot\sin')\cdot\mathrm{id}+(\log\circ\sin))(x) \\ &= \sin(x)^x\left(\frac{x\cos(x)}{\sin(x)}+\log(\sin(x))\right). \end{aligned}$$

Mit der Produktregel ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [g\cdot h]'(x) = g'(x)h(x)+g(x)h'(x) \\ &= x^{\sin(x)}\sin(x)^x\left(\frac{\sin(x)}{x}+\log(x)\cos(x)+\frac{x\cos(x)}{\sin(x)}+\log(\sin(x))\right) \end{aligned}$$

k) Es gilt $f(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$. Mit $\sinh' = \cosh$ und $\cosh' = \sinh$ folgt anhand der Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{\cosh(x)\cosh(x)-\sinh(x)\sinh(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)},$$

wobei wir zusätzlich $\cosh^2(x)-\sinh^2(x) = 1$ für alle $x\in\mathbb{R}$ verwendet haben.

l) Die Funktion f lässt sich offenbar auch als

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = k\pi \text{ mit } k\in\mathbb{Z} \\ \sin x & \text{falls } x\in(k\pi,(k+1)\pi) \text{ mit } k\in\mathbb{Z},\ k \text{ gerade} \\ -\sin x & \text{falls } x\in(k\pi,(k+1)\pi) \text{ mit } k\in\mathbb{Z},\ k \text{ ungerade} \end{cases}$$

schreiben. Weil sin auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, ist f auf $\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$ differenzierbar und es gilt dort

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{falls } x\in(k\pi,(k+1)\pi) \text{ mit } k\in\mathbb{Z},\ k \text{ gerade} \\ -\cos x, & \text{falls } x\in(k\pi,(k+1)\pi) \text{ mit } k\in\mathbb{Z}, k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

In den Punkten $\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$ ist f nicht differenzierbar: Wir untersuchen zunächst die Stellen $x_0 = k\pi$ mit geradem $k\in\mathbb{Z}$ und zeigen, dass der Grenzwert $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ nicht existiert. Es gilt nämlich

$$\lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0+}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0} = \sin'(x_0) = \cos(x_0) = 1$$

und

$$\lim_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0-}\frac{-\sin x-(-\sin x_0)}{x-x_0}=(-\sin)'(x_0)=-\cos(x_0)=-1.$$

Also ist f in diesen Punkten nicht differenzierbar. An den Stellen $k\pi$ mit ungeradem $k\in\mathbb{Z}$ kann man analog zeigen, dass die einseitigen Grenzwerte des Differenzenquotienten gegen -1 und 1 konvergieren, weswegen f dann auch in diesen Punkten nicht differenzierbar ist. □

Aufgabe 3

Zeigen bzw. berechnen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die folgenden Unlgeichungen bzw. Grenzwerte.

a) $\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{y^2}\le(x-y)(x+y)\mathrm{e}^{x^2}$ für alle $x>y>0$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\left(\log\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)-\log(x)\right)\right)$.

c) $x\log(x)-y\log(y)\le(x-y)(1+\log(x))$ für alle $x>y>0$.

d) $|\log(\cos(x))-\log(\cos(y))|\le\sqrt{3}\,|x-y|$ für alle $x,y\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$.

Lösungsvorschlag.

a) Seien $x,y\in\mathbb{R}$ mit $0<y<x$. Betrachte die Funktion $f\colon[y^2,x^2]\to\mathbb{R}$, $t\mapsto\mathrm{e}^t$. Da f auf $[y^2,x^2]$ stetig und auf (y^2,x^2) differenzierbar ist, erfüllt f die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes. Danach existiert ein $\xi\in(y^2,x^2)$ mit

$$\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{y^2}=f(x^2)-f(y^2)=(x^2-y^2)f'(\xi)=(x-y)(x+y)\mathrm{e}^{\xi}\le(x-y)(x+y)\mathrm{e}^{x^2}$$

wegen der Monotonie der (reellen) Exponentialfunktion.

b) Sei $x\ge1$. Dann ist log auf $[x,1+\sqrt{1+x^2}]$ stetig und auf $(x,1+\sqrt{1+x^2})$ differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz existiert dann ein $\xi_x\in(x,1+\sqrt{1+x^2})$ mit

$$\begin{aligned}x\left(\log\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)-\log(x)\right)&=\frac{x}{\xi_x}\left(1+\sqrt{1+x^2}-x\right)\\&=\frac{x}{\xi_x}\left(1+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{x^2}\right)\\&=\frac{x}{\xi_x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2}}\right)\end{aligned}$$

Wegen $x<\xi_x<1+\sqrt{1+x^2}$ gilt ferner

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}}=\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\le\frac{x}{\xi_x}\le\frac{x}{x}=1.$$

Damit ist $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\xi_x} = 1$ nach Satz 8.6 (4). Deshalb ist

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} x\left(\log\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) - \log(x)\right)\\
&\qquad = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\xi_x}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2}}\right)\\
&\qquad = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\xi_x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2}}\right)\right)\\
&\qquad = 1.
\end{aligned}$$

c) Seien $0 < y < x$. Definiere $f\colon [y,x] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t\log(t)$. Dann ist f auf $[y,x]$ stetig und auf (y,x) differenzierbar mit $f'(t) = 1\cdot\log(t) + t\cdot\frac{1}{t} = 1 + \log(t)$, $t \in (y,x)$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (y,x)$ mit

$$x\log(x) - y\log(y) = (x-y)f'(\xi) = (x-y)(1+\log(\xi)) \le (x-y)(1+\log(x)),$$

weil $\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist.

d) Wir betrachten die Funktion $f\colon [-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \log(\cos(t))$. Diese ist auf $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$ stetig differenzierbar mit $f'(t) = \frac{-\sin(t)}{\cos(t)} = -\tan(t)$. Da tan auf $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$ streng monoton wachsend ist und $\tan(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$ sowie $\tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$ gelten, ergibt sich

$$\left|f'(t)\right| \le \sqrt{3} \qquad \text{für alle } t \in [-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}].$$

Sind $x, y \in [-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$, so finden wir nach dem Mittelwertsatz ein ξ zwischen x und y mit

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y).$$

Es folgt

$$|f(x) - f(y)| = \left|f'(\xi)\right| |x-y| \le \sqrt{3}\,|x-y|\,. \qquad \square$$

Aufgabe 4

Berechnen Sie im folgenden die Ableitung der Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. $f_\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in allen Punkten des Definitionsbereiches, in denen sie existiert.

a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f_\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(x^{-1}) & \text{für } x \in (0,\infty),\\ 0, & x \in (-\infty, 0].\end{cases}$$

b) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{5}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x \in (0,\infty),\\ 0, & x \in (-\infty, 0].\end{cases}$$

c) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{|x|}} - \log(x^4)\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Lösungsvorschlag.

a) Wir stellen zunächst fest, dass f_α für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ auf der Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig differenzierbar ist. Die Produkt- und Kettenregel liefert dort

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin(x^{-1}) + x^\alpha \cdot (-1) \cos(x^{-1}) x^{-2} = x^{\alpha-2}(\alpha x \sin(x^{-1}) - \cos(x^{-1})),$$

für $x > 0$ und $f'_\alpha(x) = 0$ für $x < 0$. Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f'_α stetig. Es bleibt also noch das Verhalten von f_α in Null zu bestimmen. Wir unterscheiden nach den Werten von α.
1. Fall: $\alpha \leq 0$. Die Funktion f_α ist hier unstetig in 0, denn für $x_n = \frac{2}{\pi(2n+1)}$ gilt $\sin(x_n^{-1}) = (-1)^n$ und somit

$$f_\alpha(x_n) = \left(\frac{2}{\pi(2n+1)}\right)^\alpha (-1)^n,$$

was nicht gegen 0 konvergiert, solange $\alpha \leq 0$ gilt.
2. Fall: $0 < \alpha \leq 1$. Nun ist die Funktion f_α in 0 stetig, aber nicht differenzierbar. Für $x > 0$ gilt

$$|f_\alpha(x) - f(0)| = |x|^\alpha \left|\sin(x^{-1})\right| \leq |x|^\alpha \to 0 \quad (x \to 0),$$

aber

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{f_\alpha(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0+0} x^{\alpha-1} \sin(x^{-1})$$

existiert nicht mit der gleichen Folge als Argument wie im 1. Fall.
3. Fall: $1 < \alpha \leq 2$. Nun ist die Funktion in 0 differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar. Es gilt

$$f'_\alpha(0) = \lim_{x \to 0+0} \frac{f_\alpha(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0+0} x^{\alpha-1} \sin(x^{-1}) = 0$$

wie beim Beweis der Stetigkeit im 2. Fall. Mit der Folge $x_n = \frac{1}{n\pi}$ sehen wir jedoch, dass $\sin(x_n^{-1}) = 0$ und $\cos(x_n^{-1}) = (-1)^n$ und somit

$$f'_\alpha(x_n) = \left(\frac{1}{n\pi}\right)^{\alpha-2} (-1)^n,$$

was wiederum nicht (und damit insbesondere nicht gegen Null) konvergiert, womit f'_α nicht stetig in 0 ist.
4. Fall: $\alpha > 2$. Hier ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar, da f'_α stetig in der Null ist. Mit derselben Rechnung wie im 3. Fall ist f_α in Null differenzierbar mit $f'_\alpha(0) = 0$ und für $x \in (0,1)$ mit gilt

$$|f'_\alpha(x) - f'_\alpha(0)| \leq |x|^{\alpha-2} \left(\alpha\, |x| \left|\sin(x^{-1})\right| + \left|\cos(x^{-1})\right|\right) \leq |x|^{\alpha-2} (\alpha + 1),$$

für $x \to 0$, womit f'_α in 0 stetig ist.

b) Klar ist: für alle $x < 0$ ist f differenzierbar in x und es gilt $f'(x) = 0$. Mit den bereits zitierten Rechenregeln gilt für alle $x > 0$, dass f differenzierbar in x ist und

$$f'(x) = \frac{5}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} + 2\frac{1}{x^3}x^{\frac{5}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\left[\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right] = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{x}}\left[\frac{5}{2}x^2 + 2\right].$$

Bei $x = 0$ gilt

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0+}\frac{h^{\frac{5}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{h\to 0+} h^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{h^2}} = \left(\lim_{h\to 0+} h^{\frac{3}{2}}\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0+}\mathrm{e}^{-\frac{1}{h^2}}\right)\\ &= 0\cdot\lim_{h\to\infty}\mathrm{e}^{-h^2} = 0\cdot\lim_{h\to\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{(h^2)}} = 0\cdot\lim_{h\to\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^h} = 0\end{aligned}$$

sowie

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-}\frac{0-0}{h} = 0$$

also

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = 0.$$

c) Für $x > 0$ gilt:

$$f(x) = x^2\sin\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{|x|}} - \log(x^4)\right) = x^2\sin\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 4\log(x)\right)$$

Ferner gilt mit den bereits zitierten Rechenregeln, dass f differenzierbar in x ist und

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2x\sin\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 4\log(x)\right) + x^2\cos\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 4\log(x)\right)\left(-\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2} - \frac{4}{x}\right)\\ &= 2x\sin\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 4\log(x)\right) - \cos\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 4\log(x)\right)\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + 4x\right).\end{aligned}$$

Für $x < 0$ gilt:

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2\sin\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{|x|}} - \log(x^4)\right)\\ &= x^2\sin\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} - \log(|x|^4)\right)\\ &= x^2\sin\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} - 4\log(|x|)\right)\\ &= x^2\sin\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} - 4\log(-x)\right).\end{aligned}$$

Ferner gilt mit den bereits zitierten Rechenregeln, dass g differenzierbar in x ist und

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2x\sin\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} - 4\log(-x)\right) + x^2\cos\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} - 4\log(-x)\right)\left(\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} - \frac{4}{x}\right)\\ &= 2x\sin\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} - 4\log(-x)\right) - \cos\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} - 4\log(-x)\right)\left(4x - \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right).\end{aligned}$$

Bei $x = 0$ gilt für alle $h \neq 0$:

$$\left|\frac{f(h)-f(0)}{h}\right| = \left|\frac{h^2 \sin\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{|h|}} - \log(h^4)\right)}{h}\right| = |h| \left|\sin\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{|h|}} - \log(h^4)\right)\right| \leq |h| \to 0$$

für $h \to 0$. Folglich ist g bei $x = 0$ differenzierbar und es gilt:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 0. \qquad \square$$

Aufgabe 5

a) Sei $f\colon [-3,2] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ für alle $x \in [-3,2]$ definiert. Begründen Sie, dass f sein Maximum und Minimum annimmt und berechnen Sie diese.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Für eine physikalische Größe werden bei n Messungen die Messwerte $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ bestimmt. Bei der *Methode der kleinsten Quadrate* minimiert man die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2.$$

Zeigen Sie, dass f genau ein Minimum besitzt und berechnen Sie dieses.

Lösungsvorschlag.

a) Wir setzen $I = [-3,2]$ und $J = (-3,2)$. Die Funktion f ist stetig. Das Intervall I ist beschränkt und abgeschlossen. Nach Satz 8.15 der Vorlesung nimmt f auf I Maximum und Minimum an. Seien etwa $x_m, x_M \in I$ mit

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \qquad \forall x \in I.$$

Nach Satz 10.5 sind x_m bzw. x_M entweder Randpunkte von I oder sie liegen in J und erfüllen $f'(x) = 0$. Es gilt

$$f'(x) = 4x^3 - 8x$$

für alle $x \in J$. Damit folgt

$$f'(x) = 0 \iff 4x^3 - 8x = 0 \iff x \in \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}.$$

Es gilt ferner

$$f(-3) = 47, \quad f\left(-\sqrt{2}\right) = f\left(\sqrt{2}\right) = -2, \quad f(0) = 2 \quad \text{und} \quad f(2) = 2.$$

Damit folgen mit $x_m \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ und $x_M = -3$, dass

$$f(x_m) = -2 = \min\{f(x) : x \in I\} \quad \text{und} \quad f(x_M) = 47 = \max\{f(x) : x \in I\}$$

gelten.

b) Es ist klar, dass f differenzierbar ist. Es gilt

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} 2(x - a_k) = 2\left(\sum_{k=1}^{n} x - \sum_{m=1}^{n} a_m\right) = 2nx - 2\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n\left(x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist

$$f'(x) \begin{cases} > 0, & \text{für } x > \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \\ = 0, & \text{für } x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \\ < 0, & \text{für } x < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k. \end{cases}.$$

Nach Abschnitt 10.7 der Vorlesung ist f auf $(-\infty, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k]$ monoton fallend und auf $[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k, \infty)$ monoton wachsend. Das bedeutet: Ist $x \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$, so ist $f(x) \geq f(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k)$; ist $x \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$, so ist $f(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k) \leq f(x)$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt also $f(x) \geq f(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k)$.

Angenommen, es gäbe ein $b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ und $f(b) = g(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k)$. O.B.d.A. ist $b > \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$. Nach dem Mittelwertsatz aus Abschnitt 10.6 der Vorlesung, existiert ein $\xi \in (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k, b)$ mit $f'(\xi) = 0$. Nach obiger Rechnung ist aber $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ die einzige Nullstelle von f'.

Also muss die Annahme verworfen werden und $a = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ ist die gesuchte eindeutige Stelle des globalen Minimums von g. $\square$