Karlsruher Institut für Technologie

12. Dezember 2019
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

9. Übungsblatt

Aufgabe 1

Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

a) W ☐ F ☐ $T_n(f+g, x_0) = T_n(f, x_0) + T_n(g, x_0)$.

b) W ☐ F ☐ $(\forall n \in \mathbb{N} : T_n(f, x_0) = 0) \implies f = 0$.

c) W ☐ F ☐ $\left(\exists c \in \mathbb{R} : \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{T_1(f,x_0)(x)}{T_1(g,x_0)(x)} = c\right) \implies \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c$.

d) W ☐ F ☐ Es gelte $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-x) \iff \forall n \in \mathbb{N}_0 : a_{2n+1} = 0.$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(x+1)}{\mathrm{e}^x}$.

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x^{20}-1}$.

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\tan(x) + \dfrac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)$.

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\cos(x^{-1})}{\sin(x)}$.

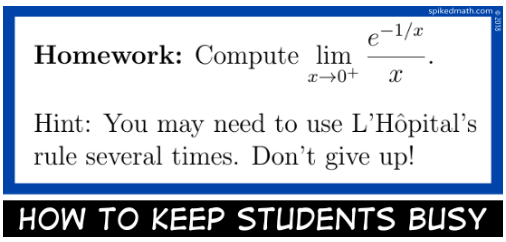
e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2} - 1 + x\sin(x)}{\sqrt{1-x^2} + x^2 - 1}$.

f) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin(\sin(x))}{x-\pi}$.

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{1 - x + \log(x)}$.

h) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\tan(x)$.

Aufgabe 3 (Quelle: http://spikedmath.com/585.html)



Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x}$.

Aufgabe 4

a) Die Funktion $f\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{1+x}$ für alle $x \in (-1,\infty)$ definiert. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(f, \frac{1}{2})$ und geben Sie eine Konstante $C > 0$ an, für die

$$\left| f(x) - T_2(f, \tfrac{1}{2})(x) \right| \le C \left| x - \tfrac{1}{2} \right|^3$$

für alle $x \in [0,1]$ gilt.

b) Die Funktion $f\colon(-1,1)\to\mathbb{R}$ ist definiert durch $f(x)=\log(1-x^2)$. Berechnen Sie $f^{(20)}(0)$ sowie $f^{(31)}(0)$.

Aufgabe 5
Finden Sie ein offenes Intervall $I\subseteq\mathbb{R}$ mit $0\in I$ und eine differenzierbare Funktion $f\colon I\to\mathbb{R}$ mit

$$f'(x)+xf(x)=0,\qquad f(0)=1.$$

Hinweis. Nehmen Sie an, dass f sich durch eine Potenzreihe darstellen lässt.

Aufgabe 6
Die Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei durch $f(x)=x^2+2x-3$ für alle $x\in\mathbb{R}$ definiert. Bestimmen Sie eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von $x_0=-1$ die Funktion $\frac{1}{f}$ darstellt.

Aufgabe 7
Wir wollen eine weitere Lösungsmöglichkeit für Aufgabe 5 c), Blatt 4, bzw. Aufgabe 3, Blatt 5, finden. Bestimmen Sie für $x\in(-1,1)$ den Wert der Reihen

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n$,

indem Sie den Differentiationssatz für Potenzreihen anwenden.

Aufgabe 8
Zeigen Sie, dass e^2 irrational ist.
Hinweis. Nehmen Sie an, dass es ganze Zahlen $a,b\in\mathbb{N}$ mit $b\mathrm{e}=a\mathrm{e}^{-1}$ gibt.

Modulprüfung

Die Klausur *Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik* findet am **20. Februar 2020** von **11–13 Uhr** statt. Die Anmeldung ist ab sofort im Campus Management Portal möglich. Der **Anmeldeschluss** ist am **9. Februar 2020**. Die **Hörsaalverteilung** wird ab 13. Februar 2020 durch Aushang am Brett neben dem Zimmer 2.027 (Geb. 20.30) bekanntgegeben.