Karlsruher Institut für Technologie

20. Dezember 2019
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschlag zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 1

Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

W F
■ □ $T_n(f+g, x_0) = T_n(f, x_0) + T_n(g, x_0)$.

Diese Aussage ist wahr. Dies folgt direkt aus der Definition der Taylorpolynome und der Linearität der Ableitungen, d.h., $(f+g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

W F
□ ■ $(\forall\, n \in \mathbb{N} : T_n(f, x_0) = 0) \implies f = 0$.

Diese Aussage ist falsch. Ein Gegenbeispiel ist unmittelbar im Anschluss an Satz 10.10 aufgeführt.

W F
■ □ $\left(\exists\, c \in \mathbb{R} : \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{T_1(f, x_0)(x)}{T_1(g, x_0)(x)} = c\right) \implies \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c.$

Diese Aussage ist wahr. Es gilt $T_1(f, x_0)(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$ und $T_1(g, x_0)(x) = g(x_0) + (x - x_0) g'(x_0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Falls $g(x_0) \neq 0$, dann gilt $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{T_1(f,x_0)(x)}{T_1(g,x_0)(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ und da g stetig in x_0 ist, erhält man ebenfalls $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$. Falls $g(x_0) = 0$, dann existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{T_1(f,x_0)(x)}{T_1(g,x_0)(x)}$ nur dann, wenn $f(x_0) = 0$ und $g'(x_0) \neq 0$ gilt. Da g' stetig ist, gilt $g'(x) \neq 0$ in einer Umgebung von x_0 und somit ist die Regel von l'Hospital anwendbar. Wir erhalten damit auch in diesem Fall

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{T_1(f, x_0)(x)}{T_1(g, x_0)(x)}.$$

W F
■ □ Es gelte $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-x) \iff \forall\, n \in \mathbb{N}_0 : a_{2n+1} = 0.$$

Diese Aussage ist wahr. Wenn $a_{2n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann ist die Aussage $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ klar. Umgekehrt gelte $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Daraus erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x) = f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n x^n$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Koeffizientenvergleich mit dem Indentitätssatz 10.14 liefert $a_n = (-1)^n a_n$ und somit $a_{2n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{\mathrm{e}^x}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^{20}-1}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\tan(x) + \frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos(x^{-1})}{\sin(x)}$.

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}-1+x\sin(x)}{\sqrt{1-x^2}+x^2-1}$.

f) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\sin(\sin(x))}{x-\pi}$.

g) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^x-x}{1-x+\log(x)}$.

h) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan(x)$.

Lösungsvorschlag.

a) Da die Funktion $f\colon (-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\log(x+1)}{\mathrm{e}^x}$ stetig ist, gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{\mathrm{e}^x} = f(0) = 0.$$

b) Es gilt $\lim\limits_{x\to 1}\sin(x-1)=0$ und $\lim\limits_{x\to 1} x^{20}-1=0$. Außerdem hat die Abbildung $x\mapsto 20x^{19}$ keine Nullstellen in einer Umgebung von 1. Die Regel von l'Hospital liefert

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^{20}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)}{20x^{19}} = \frac{1}{20}.$$

c) Für $x\in[0,\pi]\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$ ist

$$\tan(x)+\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}+\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}} = \frac{(x-\frac{\pi}{2})\sin(x)+\cos(x)}{(x-\frac{\pi}{2})\cos(x)} =: \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Es gilt

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 0 = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x).$$

Zudem ist $g'(x)=\cos(x)-(x-\frac{\pi}{2})\sin(x)$ außer in $\frac{\pi}{2}$ nur dann Null, wenn $\tan(x)=\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}$. Da der Tangens auf $(0,\frac{\pi}{2}$ und $(\frac{\pi}{2},\pi)$ streng monoton wachsend und $\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}$ streng monoton fallend ist, kann dies in beiden Intervallen jeweils nur ein Mal der Fall sein, wodurch eine Umgebung um $\frac{\pi}{2}$ gefunden werden kann, in der $g'(x)$ (außer in $\frac{\pi}{2}$) nicht Null ist. Mit der Regel von de l'Hospital folgt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)+(x-\frac{\pi}{2})\cos(x)-\sin(x)}{\cos(x)-(x-\frac{\pi}{2})\sin x}\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(x-\frac{\pi}{2})\cos(x)}{\cos(x)-(x-\frac{\pi}{2})\sin(x)} =: \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{F(x)}{G(x)}.\end{aligned}$$

Es gilt

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} F(x) = 0 = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} G(x).$$

Nochmalige Anwendung der Regel von de l'Hospital liefert (das Argument dafür, dass $G'(x) \neq 0$ in einer Umgebung von $\frac{\pi}{2}$ funktioniert analog zur Argumentation bei g')

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x) - \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin(x)}{-\sin(x)-\sin(x)-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos(x)} = \frac{0}{-2} = 0.$$

Insgesamt haben wir also

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\tan(x) + \frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right) = 0.$$

Die Begründung, warum wir L'Hospital anwenden dürfen, erfolgt dabei rückwärts: Da $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{F'(x)}{G'(x)} = 0$ ist, existiert auch $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{F(x)}{G(x)} = 0$, weshalb auch $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ existiert.

d) Wir versuchen, ob wir die Regel von de l'Hospital anwenden können. Hier konvergieren Zähler $f(x) = x^2\cos(x^{-1})$ und Nenner $g(x) = \sin(x)$ gegen 0, aber

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(x^{-1}) + x^2\sin(x^{-1})\frac{1}{x^2}}{\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(x^{-1}) + \sin(x^{-1})}{\cos(x)}$$

existiert nicht, denn für $x_n := ((n+\frac{1}{2})\pi)^{-1}$ hat der Bruch den Wert $\frac{(-1)^n}{\cos(x_n)}$. Die Regel von de l'Hospital ist demnach nicht anwendbar. Der Grenzwert existiert jedoch, denn

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos(x^{-1})}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} \cdot x\cos(x^{-1}) = 1\cdot 0 = 0.$$

e) Zähler und Nenner sind differenzierbar in $(-1,1)$ und nehmen in 0 den Wert Null an. Die Regel von de l'Hospital liefert (mit $f(x) := \mathrm{e}^{-x^2} - 1 + x\sin(x)$ und $g(x) := \sqrt{1-x^2} + x^2 - 1$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-x^2} - 1 + x\sin(x)}{\sqrt{1-x^2}+x^2-1} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x\mathrm{e}^{-x^2} + \sin(x) + x\cos(x)}{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 2x}.$$

Diesen Grenzwert bestimmen wir durch ein weiteres Anwenden der Regel von de l'Hospital, denn Zähler und Nenner sind wieder differenzierbar auf $(-1,1)$ und nehmen in 0 den Wert Null an. Es folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2x\mathrm{e}^{-x^2} + \sin(x) + x\cos(x)}{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\mathrm{e}^{-x^2} + 4x^2\mathrm{e}^{-x^2} + 2\cos(x) - x\sin(x)}{-\frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} + 2} = \frac{0}{1} = 0$$

f) Die Funktionen $f_1, f_2\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$f_1(x) = \sin(\sin(x)) \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = x - \pi$$

sind differenzierbar und es gilt $\lim_{x\to\pi} f_1(x) = \lim_{x\to 1} f_2(x) = 0$. Ferner ist $f_1'(x) = \cos(\sin(x))\cos(x)$ und $f_2'(x) = 1 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Folglich gilt nach der Regel von l'Hospital

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(\sin(x))}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{\cos(\sin(x))\cos(x)}{1} = -1.$$

g) Wir wenden zwei Mal hintereinander die Regel von de l'Hospital an (Zähler und Nenner nehmen in beiden Fällen den Wert 0 an). Wegen $(x^x)' = x^x(1+\ln x)$ (siehe Aufgabe 2 h), Blatt 8) ergibt sich

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \log(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(1+\log(x)) - 1}{-1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(1+\log(x))^2 + x^x\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1+1}{-1} = -2.$$

h) Wir möchten

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\tan(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(x-\frac{\pi}{2})\sin(x)}{\cos(x)} =: \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)}$$

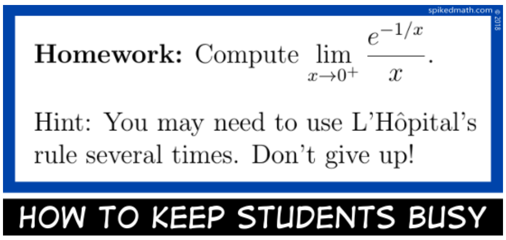
berechnen. Es gilt

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 0 = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x).$$

Mit der Regel von de l'Hospital folgt

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\tan(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) + (x-\frac{\pi}{2})\cos(x)}{-\sin(x)} = -1. \qquad \square$$

Aufgabe 3 (Quelle: http://spikedmath.com/585.html)



Berechnen Sie $\lim_{x\to 0+0} \frac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x}$.

Lösungsvorschlag. Für alle $x \in (0,\infty)$ gilt

$$\frac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x} = \frac{x^{-1}}{\mathrm{e}^{1/x}}.$$

Für $x \to 0+0$ konvergiert sowohl der Zähler als auch der Nenner gegen ∞, die Funktion $x \mapsto -x^2\mathrm{e}^{1/x}$ hat keine Nullstellen in $(0,\infty)$ und wir erhalten mit der Regel von L'Hospital

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{x^{-1}}{\mathrm{e}^{1/x}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{-x^{-2}}{-x^{-2}\mathrm{e}^{1/x}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{\mathrm{e}^{1/x}} = 0. \qquad \square$$

Aufgabe 4

a) Die Funktion $f\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{1+x}$ für alle $x \in (-1,\infty)$ definiert. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(f, \frac{1}{2})$ und geben Sie eine Konstante $C > 0$ an, für die
$$\left|f(x) - T_2(f, \tfrac{1}{2})(x)\right| \le C\left|x - \tfrac{1}{2}\right|^3$$
für alle $x \in [0,1]$ gilt.

b) Die Funktion $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $f(x) = \log(1-x^2)$. Berechnen Sie $f^{(20)}(0)$ sowie $f^{(31)}(0)$.

Lösungsvorschlag.

a) Die Funktion f ist beliebig oft differenzierbar. Wir berechnen die ersten drei Ableitungen. Für alle $x \in (-1,\infty)$ gilt:
$$\begin{aligned}
f(x) &= \mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{1+x},\\
f^{(1)}(x) &= -\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{(1+x)^2},\\
f^{(2)}(x) &= \mathrm{e}^{-x} + \frac{2}{(1+x)^3},\\
f^{(3)}(x) &= -\mathrm{e}^{-x} - \frac{6}{(1+x)^4}.
\end{aligned}$$

Das Taylor-Polynom $T_2(f, \frac{1}{2})$ ist nach der Definition vor Satz 10.11 durch
$$\begin{aligned}
T_2(f, \tfrac{1}{2})(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right)}{k!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^k\\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} + \frac{4}{9}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} + \frac{16}{27}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2
\end{aligned}$$
für alle $x \in (-1,\infty)$ gegeben. Sei nun $x \in [0,1]$. Nach dem Satz von Taylor gibt es ein ξ zwischen x und $\frac{1}{2}$ derart, dass
$$f(x) - T_2(f, \tfrac{1}{2})(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 = -\left(\frac{1}{6\sqrt{\mathrm{e}}} + \frac{1}{(1+\xi)^4}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$$
gilt. Wegen $0 < \xi$ und damit
$$\left|f^{(3)}(\xi)\right| = \left|-\mathrm{e}^{-\xi} - \frac{6}{(1+\xi)^4}\right| = \mathrm{e}^{-\xi} + \frac{6}{(1+\xi)^4} \le \mathrm{e}^{-0} + \frac{6}{(1+0)^4} = 7$$
folgt mit $C := \frac{7}{6}$ wie gefordert
$$\left|f(x) - T_2(f, \tfrac{1}{2})(x)\right| \le C\left|x - \tfrac{1}{2}\right|^3$$
für alle $x \in [0,1]$.

b) Für alle $x \in (-1,1)$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \log((1-x)(1+x)) \\ &= \log(1-x) + \log(1+x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(-x)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}-1}{n} x^n. \end{aligned}$$

Wir setzen $a_n = \frac{(-1)^{n+1}-1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$ und erhalten

$$f^{(20)}(0) = 20! a_{20} = -\frac{19!}{10} \quad \text{und} \quad f^{(31)}(0) = 31! \cdot a_{31} = 0. \qquad \square$$

Aufgabe 5

Finden Sie ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und eine differenzierbare Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ mit

$$f'(x) + xf(x) = 0, \qquad f(0) = 1.$$

Hinweis. Nehmen Sie an, dass f sich durch eine Potenzreihe darstellen lässt.

Lösungsvorschlag. Wir nehmen an, dass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{für } x \in I = (-R, R),$$

wobei $I = \mathbb{R}$ für $R = \infty$. Nun wissen wir bereits, dass $1 = f(0) = a_0$ gelten muss. Außerdem gilt nach Satz 10.12

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Soll f nun die gegebene Gleichung erfüllen, so muss gelten, dass

$$\begin{aligned} 0 &= f'(x) + xf(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n \\ &= a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+1) a_{n+1} + a_{n-1}) x^n \end{aligned}$$

für jedes $x \in I$. Nach Satz 10.14 liefert das per Koeffizientenvergleich, dass

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_{n+1} = -\frac{a_{n-1}}{n+1} \quad \text{für } n \geq 1.$$

Für ungerade $n = 2k+1$ folgt somit $a_{2k+1} = 0$, für gerade $n = 2k$ folgt

$$a_{2k} = -\frac{a_{2(k-1)}}{2k} = \frac{a_{2(k-2)}}{2^2 k(k-1)} = \cdots = (-1)^k \frac{a_0}{2^k k!} = \frac{(-1)^k}{2^k k!}.$$

Somit ergibt sich

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^k k!} = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

und wir können $I = \mathbb{R}$ wählen. $\square$

Aufgabe 6
Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = x^2 + 2x - 3$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Bestimmen Sie eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von $x_0 = -1$ die Funktion $\frac{1}{f}$ darstellt.

Lösungsvorschlag. Gesucht ist eine Potenzreihe $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ mit Konvergenzradius $\rho > 0$ und

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $|x+1| < \rho$. Multiplizieren mit dem Nenner der linken Seite liefert die äquivalente Aussage:

$$\begin{aligned}
1 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n\right)\left(x^2+2x-3\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n\right)\left((x+1)^2 - 1 - 3\right)\\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n\right)\left((x+1)^2 - 4\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^{n+2}\right) - 4\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n\right)\\
&= \left(\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} (x+1)^n\right) - 4\left(a_0 + a_1(x+1) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (x+1)^n\right)\\
&= -4a_0 - 4a_1(x+1) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-2} - 4a_n)(x+1)^n
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x+1| < \rho$. Sowohl die linke als die rechte Seite dieser Gleichung ist ein Funktionswert einer durch eine Potenzreihe definierten Funktion. Beide Reihen haben mindestens den Konvergenzradius $\rho > 0$. Wir dürfen also den Identitätssatz für Potenzreihen (Satz 10.14) verwenden (Koeffizientenvergleich) und schließen

$$-4a_0 = 1, \quad -4a_1 = 0, \quad \text{und} \quad a_{n-2} - 4a_n = 0 \quad \text{für alle } n \geq 2.$$

Damit ergibt sich induktiv:

$$\begin{aligned}
a_0 &= -\frac{1}{4}\\
a_1 &= 0\\
a_{2n} &= \frac{1}{4} a_{2(n-1)} = \cdots = \left(\frac{1}{4}\right)^n a_0 = -\left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{1}{4} = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\\
a_{2n+1} &= \frac{1}{4} a_{2(n-1)+1} = \cdots = \left(\frac{1}{4}\right)^n a_1 = 0.
\end{aligned}$$

Als Letztes müssen wir nur sicherstellen, dass die gefundene Potenzreihe tatsächlich einen positiven Konvergenzradius hat. Satz 7.16 liefert sofort:

$$\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{4}}} = 2 > 0.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x+1| < 2$ gilt also:

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}(x+1)^{2n}$$

Bemerkung: Alternativ lässt sich die Aufgabe auch über die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{\frac{1}{4}}{x-1} - \frac{\frac{1}{4}}{x+3} = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{1-\frac{x+1}{2}} + \frac{1}{1-(-\frac{x+1}{2})}\right)$$

und die geometrischen Reihe lösen. □

Aufgabe 7
Wir wollen eine weitere Lösungsmöglichkeit für Aufgabe 5 c), Blatt 4, bzw. Aufgabe 3, Blatt 5, finden. Bestimmen Sie für $x \in (-1,1)$ den Wert der Reihen

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n$,

indem Sie den Differentiationssatz für Potenzreihen anwenden.

Lösungsvorschlag. Für $x \in (-1,1)$ gilt bekanntlich

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} =: f(x).$$

Nach Satz 10.12 gilt nun (durch Differenzierung beider Seiten)

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n + \frac{1}{1-x}$$

und somit

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Analog folgt

$$\begin{aligned} f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n + 3\sum_{n=1}^{\infty} nx^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n + \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-x} \end{aligned}$$

und somit

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{3x}{(1-x)^2} - \frac{2}{1-x} = \frac{2-3x(1-x)-2(1-x)^2}{(1-x)^3} = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}. \quad \square$$

Aufgabe 8

Zeigen Sie, dass e^2 irrational ist.

Hinweis. Nehmen Sie an, dass es ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ mit $b\mathrm{e} = a\mathrm{e}^{-1}$ gibt.

Lösungsvorschlag. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, es gäbe $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{e}^2 = \frac{a}{b}$. Dann folgt $b\mathrm{e} = a\mathrm{e}^{-1}$. Durch Multiplikation mit $n!$ erhalten wir die Gleichung

$$b\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!} + b\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n!}{k!} = b\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n!}{k!} = a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n!(-1)^k}{k!} = a\sum_{k=0}^{n}\frac{n!(-1)^k}{k!} + a\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n!(-1)^k}{k!}. \quad (1)$$

Die Terme $b\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}$ und $a\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n!(-1)^k}{k!}$ sind jeweils ganze Zahlen. Außerdem erhalten wir mit der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned}
0 < b\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n!}{k!} &= \frac{b}{n+1} + \frac{b}{(n+2)(n+1)} + \frac{b}{(n+3)(n+2)(n+1)} + \dots \\
&\leq \frac{b}{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^k} \\
&= \frac{b}{n}.
\end{aligned}$$

Für gerades n erhalten wir ferner

$$\begin{aligned}
-\frac{a}{n+1} \leq a\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n!(-1)^k}{k!} &= -a\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+2)(n+1)} + \frac{1}{(n+3)(n+2)(n+1)} \mp \dots\right) \\
&\leq -\frac{a}{n+1} + \frac{a}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{k+1}} \\
&= -\frac{a}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) < 0.
\end{aligned}$$

Wenn wir also n gerade und genügend groß wählen, dann ist die linke Seite Gleichung (1) ein wenig größer als eine ganze Zahl, die rechte Seite jedoch ein wenig kleiner als eine ganze Zahl. Die ist unmöglich, daher muss die Annahme, dass e^2 eine rationale Zahl ist, verworfen werden. $\square$