Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

10. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Rieman integrierbar. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

a) W □ F □ $\left(f \text{ monoton und } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0\right) \Longrightarrow f = 0.$

b) W □ F □ $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow f = 0.$

c) W □ F □ $\left(f \text{ stetig und } \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0\right) \Longrightarrow f = 0.$

d) W □ F □ $\left(f \text{ stetig und } \forall\, a \le c < d \le b : \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = 0\right) \Longrightarrow f = 0.$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^1 (1+2x)^3\,\mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int_{-2}^2 |x-1|\,\mathrm{d}x.$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x.$

e) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x.$

f) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x(1+\log(x))}\,\mathrm{d}x.$

g) $\displaystyle\int_1^4 \arctan\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)\,\mathrm{d}x.$

h) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x.$

i) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{(2x^2)}\sin(\mathrm{e}^{(x^2)})\,\mathrm{d}x.$

Erinnerung. $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Aufgabe 3

Sei $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

a) $\displaystyle\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

c) $\displaystyle\int (\log(x))^2\,\mathrm{d}x.$

d) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x.$

e) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \sin(ax)\,\mathrm{d}x.$

f) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+4x+8}\,\mathrm{d}x.$

Aufgabe 4

a) Beweisen Sie den erweiterten Mittelwertsatz: Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g \in R[a.b]$ mit $g \ge 0$ oder $g \le 0$, so existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Folgern Sie daraus den Mittelwertsatz der Integralrechnung: Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

b) Sei $a > 0$ und $f\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$ stetig. Beweisen Sie: Ist f gerade, also $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in [-a, a]$, so gilt $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$. Ist f ungerade, also $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in [-a, a]$, so gilt $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Aufgabe 5

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $F(x) := \int_0^{\sin(x)} \sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t$ und $G(x) := \int_x^{\sin(x)} \sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t$ differenzierbar sind und berechnen Sie die Ableitung.

b) Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Wir definieren

$$f_1(x) = \int_a^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t, \qquad f_2(x) = \int_a^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t - f(x)$$

für alle $x \in [a, b]$. Zeigen Sie, dass f_1 und f_2 stetig differenzierbar und monoton wachsend sind. Man kann also f als Differenz zweier monoton wachsender, stetig differenzierbarer Funktionen schreiben.

Aufgabe 6

a) Leiten Sie mit Hilfe partieller Integration eine Rekursionsformel für $\int \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$ $(n \in \mathbb{N})$ her und zeigen Sie damit, dass für $k \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\prod_{j=1}^{k}\frac{2j-1}{2j}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1}(x)\,\mathrm{d}x = \prod_{j=1}^{k}\frac{2j}{2j+1}.$$

b) Beweisen Sie, dass die Wallissche Produktfolge

$$w_n := \prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{4k^2-1}$$

konvergiert und $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \frac{\pi}{2}$ gilt.

Raumänderung

Bitte beachten Sie, dass die **Vorlesung am Dienstag** ab dem 7. Januar 2020 im **Messtechnik-Hörsaal (MTI)** (Geb. 30.33) stattfindet.

Modulprüfung

Die Klausur *Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik* findet am **20. Februar 2020** von **11–13 Uhr** statt. Die Anmeldung ist ab sofort im Campus Management Portal möglich. Der **Anmeldeschluss** ist am **9. Februar 2020**. Die **Hörsaalverteilung** wird ab 13. Februar 2020 durch Aushang am Brett neben dem Zimmer 2.027 (Geb. 20.30) bekanntgegeben.