Karlsruher Institut für Technologie

10. Januar 2020
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dr. Andreas Geyer-Schulz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschlag zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Rieman integrierbar.

W F
☐ ■ $\Big(f \text{ monoton und } \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0\Big) \Longrightarrow f = 0.$

Die Behauptung ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = 0$ für $x \in [a,b)$ und $f(b) = 1$. Dann ist f monoton wachsend, f ist Riemann-intergrierbar mit $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, aber es gilt $f \neq 0$.

W F
☐ ■ $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow f = 0.$

Die Behauptung ist falsch. Als Gegenbeispiel verwenden wir die Funktion f aus Teil a).

W F
■ ☐ $\Big(f \text{ stetig und } \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0\Big) \Longrightarrow f = 0.$

Diese Behauptung ist richtig. Sei $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ und es gelte $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$. Wir nehmen an, dass es $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) \neq 0$ gibt. Ohne Einschränkung können wir $f(x_0) > 0$ annehmen, ansonsten betrachten wir $-f$ statt f. Wir setzen $\varepsilon = \frac{1}{2}f(x_0)$. Da f stetig ist, gibt es ein $\delta \in \big[0, \frac{1}{2}(b-a)\big]$ mit $f(x) > \varepsilon$ für alle $x \in U_\delta(x_0) \cap [a,b]$. Wir definieren die Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = \begin{cases} \varepsilon, & x \in U_\delta(x_0) \cap [a,b], \\ 0, & x \in [a,b] \setminus U_\delta(x_0). \end{cases}$$

Nach Konstruktion gilt $0 \leq g(x) \leq |f(x)|$ für alle $x \in [a,b]$ und aus der Monotonie des Integrals folgt

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \delta\varepsilon > 0.$$

Dies widerspricht der Voraussetzung und somit ist die Annahme $f \neq 0$ falsch. Es folgt die Behauptung.

W F
■ ☐ $\Big(f \text{ stetig und } \forall\, a \leq c < d \leq b : \displaystyle\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = 0\Big) \Longrightarrow f = 0.$

Diese Aussage ist wahr. Sei $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ und es gelte $\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für alle $c,d \in [a,b]$ mit $c < d$. Wir nehmen an, dass es $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) \neq 0$ gibt. Wie in Teil c) können wir ohne Einschränkung zusätzlich $f(x_0) > 0$ annehmen. Wir konstruieren die Funktion g wie in Teil c) und wählen $c,d \in [a,b]$ mit $(c,d) = U_\delta(x_0) \cap (a,b)$. Es folgt

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_c^d g(x)\,\mathrm{d}x \geq \varepsilon\delta > 0$$

und wir erhalten wieder einen Widerspruch zur Voraussetzung an f. Damit ist $f \neq 0$ falsch und es folgt die Behauptung.

Aufgabe 2
Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^1 (1+2x)^3 \,\mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int_{-2}^2 |x-1| \,\mathrm{d}x.$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x.$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\cos(x) \,\mathrm{d}x.$

e) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} \,\mathrm{d}x.$

f) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x(1+\log(x))} \,\mathrm{d}x.$

g) $\displaystyle\int_1^4 \arctan\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right) \,\mathrm{d}x.$

h) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}x.$

i) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{(2x^2)} \sin(\mathrm{e}^{(x^2)}) \,\mathrm{d}x.$

Erinnerung. $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lösungsvorschlag.

a) Entweder wir erkennen direkt die Funktion $x \mapsto \frac{1}{8}(1+2x)^4$ als Stammfunktion des Integranden, oder wir nutzen die Substitution $y(x) = 1+2x$ (also $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2$, was $\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\mathrm{d}x$ liefert, sowie $y(0) = 1$, $y(1) = 3$). Damit folgt

$$\int_0^1 (1+2x)^3 \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_1^3 y^3 \,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{8}y^4\Big|_1^3 = \frac{81-1}{8} = 10.$$

b) Wir teilen das Integral auf, um den Betrag aufzulösen. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 |x-1| \,\mathrm{d}x &= \int_{-2}^1 1-x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 x-1\,\mathrm{d}x = \left(x-\tfrac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-2}^1 + \left(\tfrac{1}{2}x^2 - x\right)\Big|_1^2 \\ &= \left(1-\tfrac{1}{2}\right) - (-2-2) + (2-2) - \left(\tfrac{1}{2}-1\right) = 5.\end{aligned}$$

c) Mit der Substitution $y(x) = \arcsin(x)$ gilt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, also $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$, sowie $y(0) = 0$, $y(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$. Es folgt

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} y\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{2}y^2\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi^2}{72}.$$

d) Mit $y(x) = \sin(x)$ gilt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos(x)$, also $\cos(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$, sowie $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Es folgt

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{2}y^2\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{4}.$$

e) Mit $y(x) = \sqrt{x}$ gilt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, also $\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}y$, sowie $y(1) = 1$, $y(4) = 2$. Es folgt

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x = 2\int_1^2 \frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}y = 2\log(1+y)\big|_1^2 = \log(3) - \log(2) = 2\log(\tfrac{3}{2}).$$

f) Mit $y(x) = \log x$ gilt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$, also $\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$, sowie $y(1) = 0$, $y(\mathrm{e}) = 1$. Es folgt

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x(1+\log(x))}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}y = \log(1+y)\Big|_0^1 = \log(2) - \log(1) = \log(2).$$

g) Mit $y(x) = \sqrt{\sqrt{x} - 1}$ gilt $\sqrt{x} = y(x)^2 + 1$ sowie $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}-1}} = \frac{1}{4(y^2+1)y}$, also $\mathrm{d}x = 4y(y^2+1)\mathrm{d}y$, sowie $y(1) = 0$, $y(4) = 1$. Es folgt

$$\int_1^4 \arctan(\sqrt{\sqrt{x} - 1})\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (4y^3 + 4y)\arctan(y)\,\mathrm{d}x.$$

Dieses Integral berechnen wir mit Hilfe partieller Integration.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (4x^3 + 4x)\arctan(x)\,\mathrm{d}x &= (x^4 + 2x^2)\arctan(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^4 + 2x^2}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3\pi}{4} - \int_0^1 \frac{(1 + x^2)^2 - 1}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3\pi}{4} - \int_0^1 (1 + x^2)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3\pi}{4} - (x + \tfrac{1}{3}x^3)\Big|_0^1 + \arctan(x)\Big|_0^1 \\
&= \frac{3\pi}{4} - \frac{4}{3} + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

h) Durch scharfes Hinsehen erkennen wir, dass $x \mapsto -\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$ eine Stammfunktion von $x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ ist. Deshalb folgt mit partieller Integration, dass

$$\begin{aligned}
&\int_1^2 \frac{x^3}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^2 x^2 \frac{x}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}\Big|_1^2 + 2\int_1^2 \frac{x}{(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 2(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}\big|_1^2 = -\frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{2} = \frac{6\sqrt{5}}{5} - \frac{3\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

i) Durch scharfes Hinsehen erkennen wir, dass $x \mapsto -\frac{1}{2}\cos(\mathrm{e}^{(x^2)})$ eine Stammfunktion von $x \mapsto x\mathrm{e}^{(x^2)}\sin(\mathrm{e}^{(x^2)})$ ist. Deshalb folgt mit partieller Integration, dass

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\mathrm{e}^{2x^2}\sin(\mathrm{e}^{x^2})\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \mathrm{e}^{(x^2)} x\mathrm{e}^{(x^2)}\sin(\mathrm{e}^{(x^2)})\,\mathrm{d}x \\
&= -\tfrac{1}{2}\cos(\mathrm{e}^{(x^2)})\mathrm{e}^{(x^2)}\big|_0^1 + \int_0^1 x\mathrm{e}^{(x^2)}\cos(\mathrm{e}^{(x^2)})\,\mathrm{d}x \\
&= -\tfrac{1}{2}\cos(\mathrm{e})\mathrm{e} + \tfrac{1}{2}\cos(1) + \tfrac{1}{2}\sin(\mathrm{e}^{(x^2)})\Big|_0^1 \\
&= \tfrac{1}{2}(\cos(1) - \sin(1) + \sin(\mathrm{e}) - \mathrm{e}\cos(\mathrm{e})).
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3
Sei $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

a) $\displaystyle\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

c) $\displaystyle\int (\log(x))^2\,\mathrm{d}x.$

d) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x.$

e) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \sin(ax)\,\mathrm{d}x.$

f) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+4x+8}\,\mathrm{d}x.$

Lösungsvorschlag.

a) Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x &= \int \arcsin(x)\cdot 1\,\mathrm{d}x \\ &= x\arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

für $x \in (-1,1)$.

b) Mit der Substitution $y(x) = \sqrt{x}$ gilt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, also $\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\mathrm{d}y = 2y\mathrm{d}y$. Somit folgt

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int y\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y\Big|_{y=\sqrt{x}}.$$

Das letzte Integral berechnen wir über partielle Integration. Es gilt

$$\int y\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y = y\mathrm{e}^y - \int \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y = y\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^y + C = (y-1)\mathrm{e}^y + C.$$

Somit folgt insgesamt

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2(\sqrt{x}-1)\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + C$$

für $x > 0$.

c) Nach der Vorlesung (Vorgehen analog zu Teil a)) ist eine Stammfunktion von log gegeben durch $x \mapsto x\log(x) - x$. Durch partielle Integration folgt

$$\begin{aligned}\int (\log(x))^2\,\mathrm{d}x = \int \log(x)\log(x)\,\mathrm{d}x &= \log(x)(x\log(x)-x) - \int \log(x) - 1\,\mathrm{d}x \\ &= \log(x)(x\log(x)-x) - (x\log(x) - x - x) + C \\ &= x(\log(x))^2 - 2x\log(x) + 2x + C\end{aligned}$$

für $x > 0$. Alternativ können wir auch $y(x) = \log(x)$ substituieren und das so entstehende Integral über $y^2\mathrm{e}^y$ mit partieller Integration berechnen.

d) Für $x \in (-1,1)$ folgt mit partieller Integration

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int (1-x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = (1-x)\arcsin(x) + \int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x.$$

Mit Teil a) folgt demnach

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x = (1-x)\arcsin(x) + x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C = \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C.$$

e) Mit zweimaliger partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}\int e^x \sin(ax)\,dx &= e^x \sin(ax) - a\int e^x \cos(ax)\,dx \\ &= e^x \sin(ax) - ae^x\cos(ax) - a^2\int e^x \sin(ax)\,dx.\end{aligned}$$

Addieren wir auf beiden Seiten das letzte Integral und dividieren durch $1 + a^2$, so erhalten wir

$$\int e^x \sin(ax)\,dx = \frac{e^x}{1+a^2}(\sin(ax) - a\cos(ax)) + C$$

für $x \in \mathbb{R}$.

f) Es gilt

$$\int \frac{2x+1}{x^2+4x+8}\,dx = \int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}\,dx - \frac{3}{4}\int \frac{1}{(\frac{x}{2}+1)^2+1}\,dx.$$

Im erste Integral erkennen wir im Zähler die Ableitung des Nenners, weswegen eine Stammfunktion durch $x \mapsto \log(x^2 + 4x + 8)$ gegeben ist (eine Substitution $y(x) = x^2 + 4x + 8$ macht dies deutlich). Im zweiten Integral substituieren wir $y(x) = \frac{x}{2} + 1$ mit $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$, also $dx = 2dy$. Somit folgt

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{x^2+4x+8}\,dx &= \log(x^2+4x+8) + C - \frac{3}{2}\int \frac{1}{y^2+1}\,dy\Big|_{y=\frac{x}{2}+1} \\ &= \log(x^2+4x+8) - \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}+1\right) + C\end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung. Der Ausdruck $x^2 + 4x + 8$ ist positiv für alle $x \in \mathbb{R}$. Stünde im Nenner des ersten Integrals ein Ausdruck, der (auch) negativ sein kann, so müsste man die Nullstellen für die Stammfunktion natürlich ausschließen und die Stammfunktion in den restlichen Punkten wäre durch den Logarithmus des Betrags gegeben, wie man anhand einer Fallunterscheidung erkennt. □

Aufgabe 4

a) Beweisen Sie den erweiterten Mittelwertsatz: Ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g \in R[a.b]$ mit $g \geq 0$ oder $g \leq 0$, so existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Folgern Sie daraus den Mittelwertsatz der Integralrechnung: Ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

b) Sei $a > 0$ und $f\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$ stetig. Beweisen Sie: Ist f gerade, also $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in [-a, a]$, so gilt $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$. Ist f ungerade, also $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in [-a, a]$, so gilt $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Lösungsvorschlag.

a) Da f stetig auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ ist, nimmt es sein Maximum M und sein Minimum m an. Nach Satz 11.2 (1) gilt also (unter der Annahme $g \geq 0$, der andere Fall funktioniert analog)

$$m \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq M \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Also existiert ein $K \in [m, M]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = K \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zu diesem K existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [a, b]$ mit $K = f(\xi)$, womit die erste Behauptung folgt. Setzt man $g \equiv 1$, so folgt die zweite Behauptung mit $\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = b - a$.

b) Nach Satz 11.6 (1) gilt

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Für das erste Integral nutzen wir die Substitution $y(x) = -x$. In der Schreibweise der Merkregel aus der Vorlesung gilt nun $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1$, also $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$. Außerdem gilt $y(-a) = a$, $y(0) = 0$. Nach der Substitutionsregel folgt demnach

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^0 f(-x)(-1)\mathrm{d}y = \int_0^a f(-x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x, & f \text{ gerade}, \\ -\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x, & f \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Dies liefert die Behauptung. □

Aufgabe 5

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $F(x) := \int_0^{\sin(x)} \sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t$ und $G(x) := \int_x^{\sin(x)} \sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t$ differenzierbar sind und berechnen Sie die Ableitung.

b) Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Wir definieren

$$f_1(x) = \int_a^x \left|f'(t)\right|\,\mathrm{d}t, \qquad f_2(x) = \int_a^x \left|f'(t)\right|\,\mathrm{d}t - f(x)$$

für alle $x \in [a, b]$. Zeigen Sie, dass f_1 und f_2 stetig differenzierbar und monoton wachsend sind. Man kann also f als Differenz zweier monoton wachsender, stetig differenzierbarer Funktionen schreiben.

Lösungsvorschlag.

a) Die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^x \sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t,$$

ist nach dem Hauptsatz 11.9 differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $f'(x) = \sin(\mathrm{e}^x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, da der Integrand stetig ist. Mit $g(x) := \sin(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ gilt nun $F(x) = f(g(x))$ und $G(x) = f(g(x)) - f(x)$, somit folgt mit den üblichen Rechenregeln zur Differentiation, dass F und G differenzierbar sind mit

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \sin(\mathrm{e}^{\sin(x)})\cos(x)$$

und

$$G'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) - f'(x) = \sin(\mathrm{e}^{\sin(x)})\cos(x) - \sin(\mathrm{e}^x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Die Funktionen f_1 und f_2 sind wohldefiniert, da die Funktion $t \mapsto |f'(t)|$ stetig auf dem Intervall $\langle a, x\rangle$ ist für alle $x \in I$. Außerdem ist klar, dass $f = f_1 - f_2$ gilt. Es bleibt zu zeigen, dass f_1 und f_2 monoton wachsend sind. Nach dem Hauptsatz 11.10 gilt

$$f_1'(x) = |f'(x)| \geq 0, \qquad f_2'(x) = |f'(x)| - f'(x) \geq 0,$$

womit die Behauptung aus Folgerung 10.7 folgt. □

Aufgabe 6

a) Leiten Sie mit Hilfe partieller Integration eine Rekursionsformel für $\int \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$ ($n \in \mathbb{N}$) her und zeigen Sie damit, dass für $k \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\prod_{j=1}^{k}\frac{2j-1}{2j}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1}(x)\,\mathrm{d}x = \prod_{j=1}^{k}\frac{2j}{2j+1}.$$

b) Beweisen Sie, dass die Wallissche Produktfolge

$$w_n := \prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{4k^2-1}$$

konvergiert und $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \frac{\pi}{2}$ gilt.

Lösungsvorschlag.

a) Wir berechnen

$$\begin{aligned}\int \cos^n(x)\,\mathrm{d}x &= \int \cos^{n-1}(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \cos^{n-1}(x)\sin(x) - (n-1)\int \cos^{n-2}(x)(-\sin(x))\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \cos^{n-1}(x)\sin(x) + (n-1)\int \cos^{n-2}(x)(1-\cos^2(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \cos^{n-1}(x)\sin(x) + (n-1)\int \cos^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x - (n-1)\int \cos^n(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Bringen wir den letzten Summanden auf die linke Seite und dividieren durch n, so erhalten wir die Rekursionsformel

$$\int \cos^n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Da der erste Term für die Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ entfällt für $n \geq 2$, ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{2k-1}{2k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(k-1)}(x)\,\mathrm{d}x = \cdots\\ &= \prod_{j=1}^{k}\frac{2j-1}{2j}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^0(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{2}\prod_{j=1}^{k}\frac{2j-1}{2j}\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1}(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{2k}{2k+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(k-1)+1}(x)\,\mathrm{d}x = \cdots\\ &= \prod_{j=1}^{k}\frac{2j}{2j+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \prod_{j=1}^{k}\frac{2j}{2j+1}\end{aligned}$$

für $k \in \mathbb{N}$.

b) Definieren wir

$$c_k := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k(x)\,\mathrm{d}x,$$

so folgt

$$w_n = \prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}\frac{2k}{2k-1} = \frac{\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}}{\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}} = \frac{\pi}{2}\frac{c_{2n+1}}{c_{2n}}.$$

Es bleibt also zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} = 1.$$

Wegen $\cos(x) \in [0,1]$ für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ folgt $\cos^{2n}(x) \geq \cos^{2n+1} \geq \cos^{2n+2}(x)$ auf diesem Intervall, was wegen der Monotonie des Integrals $c_{2n} \geq c_{2n+1} \geq c_{2n+2}$ liefert. Deshalb folgt

$$1 \geq \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} \geq \frac{c_{2n+2}}{c_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}} \to 1 \quad (n\to\infty),$$

was nach dem Sandwichprinzip die Behauptung liefert. $\square$