9. Januar 2020
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dr. Andreas Geyer-Schulz

Karlsruher Institut für Technologie

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

11. Übungsblatt

Bitte beachten Sie, dass die **Vorlesung am Dienstag** ab dem 7. Januar 2020 im **Messtechnik-Hörsaal (MTI)** (Geb. 30.33) stattfindet.

Aufgabe 1 (Wahr oder falsch?)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $y_0 \in \mathbb{R}$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

a) W ☐ F ☐ Das Anfangswertproblem $y' = f(y)$, $y(x_0) = y_0$ besitzt eine Lösung.

b) W ☐ F ☐ Das Anfangswertproblem $y' = f(y)$, $y(x_0) = y_0$ ist eindeutig lösbar.

Sei nun $y\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$ auf dem Intervall I.

c) W ☐ F ☐ $f \in C^n(\mathbb{R}) \Longrightarrow y \in C^{n+1}(I)$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

d) W ☐ F ☐ y ist monoton.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie jeweils die maximale Lösung der folgenden Anfangswertprobleme.

a) $y'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} y(x) + x, \quad y(0) = 1.$

b) $y'(x) = 2xy(x) + x^3, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$

c) $y'(x) = \frac{x^2 - 4xy(x)}{1+x^2}, \quad y(0) = 1.$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie jeweils die maximale Lösung der folgenden Anfangswertprobleme.

a) $y'(x) = x\mathrm{e}^{-x} y^2(x), \quad y(0) = 1.$

b) $y'(x) = \mathrm{e}^{y(x)} \sin(x), \quad y(0) = -\log(3).$

c) $y'(x) = -\frac{x^2}{y^3(x)}, \quad y(0) = \sqrt{2}.$

Aufgabe 4 (13. November 2026)

In der Zeitschrift *Science* erschien am 4. November 1960 der Artikel *Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026*[1] von Heinz von Foerster, Patricia M. Mora und Lawrence W. Amiot. In diesem Artikel wird das Anfangswertproblem

$$N'(t) = \alpha_0 N(t)^{1+1/k}, \quad N(t_1) = N_1$$

zur Modellierung der Größe der Erdbevölkerung vorgeschlagen. Dabei ist $N(t)$ die Anzahl der Menschen zur Zeit t, die in Jahren nach Christi Geburt gemessen wird. Der Anfangswert ist $N_1 = 3{,}018 \cdot 10^9$ im Jahr $t_1 = 1960$. Die dimensionslosen Konstanten α_0 und k werden dadurch bestimmt, dass das obige Modell bestmöglich an die vorhandenen Daten zur Bevölkerungsentwicklung angepasst wird. Sie werden mit $\alpha_0 = 3{,}9661 \cdot 10^{-12}$ und $k = 0{,}99$ angegeben. Berechnen Sie die sogenannte Blow-Up Zeit $t_0 \in (t_1, \infty)$, für die $\lim\limits_{t \to t_0} N(t) = \infty$ gilt. Zeigen Sie, dass man die Lösung in der Form $N(t) = N_1 \left(\frac{t_0 - t_1}{t_0 - t}\right)^k$ für $t < t_0$ schreiben kann.

[1] *Science* 04 Nov 1960: Vol. 132, Issue 3436, pp. 1291-1295, DOI: 10.1126/science.132.3436.1291

Aufgabe 5 (Die logistische Gleichung)
Sei $a > 0$. Bestimmen Sie für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$ die Lösung des Anfangswertproblems $y' = (a - y)y$, $y(0) = y_0$, ihr maximales Existenzintervall sowie, falls existent, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y(x)$.

Aufgabe 6
Sei $f \in C(\mathbb{R})$. Die Funktion $\rho \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ erfülle die strikte Differentialungleichung

$$\rho'(x) < f(\rho(x))$$

für alle $x \in (a, b]$. Sei außerdem $y \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = f(y(x)), \qquad y(a) = y_0$$

für ein $y_0 > \rho(a)$. Zeigen Sie, dass $\rho(x) < y(x)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt. Dieselbe Aussage gilt, wenn man alle Ungleichungszeichen umkehrt.

Modulprüfung

Die Klausur *Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik* findet am **20. Februar 2020** von **11–13 Uhr** statt. Die Anmeldung ist ab sofort im Campus Management Portal möglich. Der **Anmeldeschluss** ist am **9. Februar 2020**. Die **Hörsaalverteilung** wird ab 13. Februar 2020 durch Aushang am Brett neben dem Zimmer 2.027 (Geb. 20.30) bekanntgegeben.

Eine Information Ihrer Fachschaft.

https://fachschaft.physik.kit.edu/drupal/content/mentorenprogramm-ws-1920