Karlsruher Institut für Technologie

17. Januar 2020
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dr. Andreas Geyer-Schulz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschlag zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $y_0 \in \mathbb{R}$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

W F
☐ ■ Das Anfangswertproblem $y' = f(y)$, $y(x_0) = y_0$ besitzt eine Lösung.

Diese Behauptung ist falsch. Definiere $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(0) = 1$ und $f(x) = 0$ für $x \neq 0$. Angenommen das Anfangswertproblem hätte eine Lösung y auf einem offenen Intervall J, dass 0 enthält. Dann erfüllt y die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ und $y'(0) = f(y(0)) = 1$. Da y stetig differenzierbar ist, ist $y'(x) > 0$ für alle x in einer kleinen Umgebung B von 0. Dort ist dann y strikt wachsend, d.h., es gilt $y(x) > 0$ für alle $x \in B \cap \{x > 0\}$. Die Differentialgleichung verlangt dann $y'(x) = f(y(x)) = 0$, für alle $x \in B \cap \{x > 0\}$. Dies widerspricht der Tatsache, dass y in diesem Bereich strikt wachsend ist. Es kann somit keine Lösung des genannten Anfangswertproblems geben.

W F
☐ ■ Das Anfangswertproblem $y' = f(y)$, $y(x_0) = y_0$ ist eindeutig lösbar.

Diese Behautpung ist falsch. Wir betrachten $y' = f(y) = 2\sqrt{y}$ mit $y(0) = 0$. Eine Lösung des Anfangswertproblems lautet $y(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Eine andere Lösung des Anfangswertproblems ist durch

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0), \\ x^2, & x \in [0, \infty), \end{cases}$$

gegeben.

Sei nun $y\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$ auf dem Intervall I.

W F
■ ☐ $f \in C^n(\mathbb{R}) \Longrightarrow y \in C^{n+1}(I)$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

Diese Behauptung ist richtig. Wir verwenden das Verfahren der vollständigen Induktion. Für $n = 0$ ist die Behauptung richtig, denn eine Lösung ist per Definition differenzierbar und es ist $y' = f(y)$ eine stetige Funktion. Die Behauptung sei für ein $n \in \mathbb{N}$ gezeigt. Da y eine Lösung ist, wird die Gleichung $y' = f(y)$ erfüllt. Nach der Kettenregel ist die Funktion $f(y)$ n-mal stetig differenzierbar. Also ist auch y' n-mal stetig differenzierbar, das heißt aber, dass y $(n+1)$-mal stetig differenzierbar ist. Dies ergibt die Behauptung.

W F
■ ☐ y ist monoton.

Diese Behauptung ist richtig. Wir nehmen an, dass y nicht monoton wäre. Da y differenzierbar ist, gibt es $a, b \in J$ derart, dass $y'(a) > 0$ und $y'(b) < 0$ gilt.

Zunächst eine kleine Vorüberlegung. Wir wollen zeigen, dass wir o.B.d.A. die Situation $a < b$ und $y(a) \leq y(b)$ betrachten können. Auf diesen Fall wollen wir zunächst die folgenden drei Fälle zurückführen.

(i) $a > b$ und $y(a) \geq y(b)$: In diesem Fall setzen wir $\tilde{y}(x) = -y(-x)$, für $x \in -J$, $\tilde{f}(x) = f(-x)$, $x \in \mathbb{R}$ und $\tilde{a} = -a$ sowie $\tilde{b} = -b$. Dann erfüllt $\tilde{u}$ die autonome Differentialgleichung $\tilde{y}'(x) = \tilde{f}(\tilde{y}(x))$, $x \in -J$. Außerdem gilt $\tilde{a} < \tilde{b}$, $\tilde{y}(\tilde{a}) = -y(a) \leq -y(b) = \tilde{y}(\tilde{b})$ und $\tilde{y}'(\tilde{a}) = y'(a) > 0$ sowie $\tilde{y}'(\tilde{b}) = y(b) < 0$.

(ii) $a > b$ und $y(a) \leq y(b)$: In diesem Fall setzen wir $\tilde{y}(x) = -y(x)$, für $x \in J$, $\tilde{f}(x) = -f(-x)$, $x \in \mathbb{R}$ und $\tilde{a} = b$ sowie $\tilde{b} = a$. Dann erfüllt $\tilde{u}$ die autonome Differentialgleichung $\tilde{y}'(x) = \tilde{f}(\tilde{y}(x))$, $x \in J$. Außerdem gilt $\tilde{a} < \tilde{b}$, $\tilde{y}(\tilde{a}) = -y(b) \leq -y(a) = \tilde{y}(\tilde{b})$ und $\tilde{y}'(\tilde{a}) = -y'(b) > 0$ sowie $\tilde{y}'(\tilde{b}) = -y(a) < 0$.

(iii) $a < b$ und $y(a) \geq y(b)$: In diesem Fall setzen wir $\tilde{y}(x) = y(-x)$, für $x \in -J$, $\tilde{f}(x) = -f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ und $\tilde{a} = -b$ sowie $\tilde{b} = -a$. Dann erfüllt $\tilde{u}$ die autonome Differentialgleichung $\tilde{y}'(x) = \tilde{f}(\tilde{y}(x))$, $x \in -J$. Außerdem gilt $\tilde{a} < \tilde{b}$, $\tilde{y}(\tilde{a}) = y(b) \leq y(a) = \tilde{y}(\tilde{b})$ und $\tilde{y}'(\tilde{a}) = -y'(b) > 0$ sowie $\tilde{y}'(\tilde{b}) = -y(a) < 0$.

Nun zum eigentlichen Beweis. Wähle $\tau \in (a,b)$ so, dass $y(\tau) = \max_{x\in[a,b]} y(x)$. Definiere ferner $\sigma = \max\{s \in (a,\tau] : y(s) = y(b)\}$. ($\sigma$ kann so definiert werden, weil wir vorausgesetzt haben, dass $y(a) \leq y(b)$ und nach dem Zwischenwertsatz ist die Menge $y((a,b))$ ein Intervall. Die Stetigkeit von y stellt sicher, dass das Maximum angenommen wird.) Also haben wir $y(\sigma) = y(b)$ sowie $y(s) > y(\sigma)$ für alle $s \in (\sigma,\tau)$. Durch Bildung des rechtsseitigen Differenzenquotienten folgt daraus $y'(\sigma) \geq 0$. Insgesamt gilt dann $0 \leq y'(\sigma) = f(y(\sigma)) = f(y(b)) = y'(b) < 0$, ein Widerspruch. Also war unsere Annahme falsch und y ist monoton.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie jeweils die maximale Lösung der folgenden Anfangswertprobleme.

a) $y'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}y(x) + x, \quad y(0) = 1.$

b) $y'(x) = 2xy(x) + x^3, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$

c) $y'(x) = \frac{x^2-4xy(x)}{1+x^2}, \quad y(0) = 1.$

Lösungsvorschlag.

a) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung. In der Notation des Satzes 12.1 sei $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ und $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x$. Es gilt

$$A(x) := \int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^x \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\,\mathrm{d}s = \left[\sqrt{1+s^2}\right]_{s=0}^{s=x} = \sqrt{1+x^2} - 1$$

sowie

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(s)}b(s)\,\mathrm{d}s &= \int_0^x \mathrm{e}^{-\sqrt{1+s^2}+1}s\,\mathrm{d}s = -\int_0^x \sqrt{1+s^2}\cdot\left(-\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right)\mathrm{e}^{-\sqrt{1+s^2}+1}\,\mathrm{d}s \\ &= -\left[\sqrt{1+s^2}\mathrm{e}^{-\sqrt{1+s^2}+1}\right]_{s=0}^{s=x} + \int_0^x \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\mathrm{e}^{-\sqrt{1+s^2}+1}\,\mathrm{d}s \\ &= -\sqrt{1+x^2}\mathrm{e}^{-\sqrt{1+x^2}+1} + 1 - \left[\mathrm{e}^{-\sqrt{1+s^2}+1}\right]_{s=0}^{s=x} \\ &= 2 - (\sqrt{1+x^2}+1)\mathrm{e}^{-\sqrt{1+x^2}+1}\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach dem Satz aus Abschnitt 12.1 der Vorlesung ist $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$y(x) = y_0 \mathrm{e}^{A(x)} + \mathrm{e}^{A(x)} \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(s)} b(s)\,\mathrm{d}s = 3\mathrm{e}^{\sqrt{1+x^2}-1} - \sqrt{1+x^2} - 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

b) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung. In der Notation des Satzes 12.1 sei $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto 2x$ und $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^3$. Es gilt

$$A(x) := \int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^x 2s\,\mathrm{d}s = \left[s^2\right]_{s=0}^{s=x} = x^2$$

sowie

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(s)} b(s)\,\mathrm{d}s &= \int_0^x s^3 \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s = -\frac{1}{2}\int_0^x s^2 \cdot (-2s)\mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s \\ &= -\frac{1}{2}\left[s^2\mathrm{e}^{-s^2}\right]_{s=0}^{s=x} - \frac{1}{2}\int_0^x (-2s)\mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s \\ &= -\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x^2} - \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-s^2}\right]_{s=0}^{s=x} = \frac{1}{2} - \frac{(1+x^2)\mathrm{e}^{-x^2}}{2}\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach dem Satz aus Abschnitt 12.3 der Vorlesung ist $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$y(x) = y_0 \mathrm{e}^{A(x)} + \mathrm{e}^{A(x)} \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(s)} b(s)\,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{x^2} - \frac{1+x^2}{2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

c) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung. In der Notation des Satzes 12.1 sei $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto -\frac{4x}{1+x^2}$ und $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $t \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$. Es gilt

$$\begin{aligned}A(x) &:= \int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s = -\int_0^x \frac{4s}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = -2\left[\log(1+s^2)\right]_{s=0}^{s=x} \\ &= -2\log(1+x^2) = \log\left(\frac{1}{(1+x^2)^2}\right)\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(s)} b(s)\,\mathrm{d}s &= \int_0^x \mathrm{e}^{-\log\left(\frac{1}{(1+s^2)^2}\right)} \frac{s^2}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = \int_0^x (1+s^2)^2 \frac{s^2}{1+s^2}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^x s^2 + s^4\,\mathrm{d}s = \left[\frac{s^3}{3} + \frac{s^5}{5}\right]_{s=0}^{s=x} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach der Bemerkung nach Satz 12.1 der Vorlesung ist $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$y(x) = u_0 \mathrm{e}^{A(x)} + \mathrm{e}^{A(x)} \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(s)} b(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}}{(1+x^2)^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems. □

Aufgabe 3
Bestimmen Sie jeweils die maximale Lösung der folgenden Anfangswertprobleme.

a) $y'(x) = x\mathrm{e}^{-x}y^2(x), \quad y(0) = 1.$

b) $y'(x) = \mathrm{e}^{y(x)}\sin(x), \quad y(0) = -\log(3).$

c) $y'(x) = -\frac{x^2}{y^3(x)}, \quad y(0) = \sqrt{2}.$

Lösungsvorschlag.

a) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. In der Notation des Satzes 12.2, sei $I = \mathbb{R}$, $J = (0, \infty)$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$, und $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $y \mapsto y^2$. Eine Stammfunktion von f ist gegeben durch

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^x s\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s \\ &= \left[-s\mathrm{e}^{-s}\right]_{s=0}^{s=x} + \int_0^x \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s = \left[-s\mathrm{e}^{-s} - \mathrm{e}^{-s}\right]_{s=0}^{s=x} = 1 - (1+x)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

für alle $x \in I$. Eine Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ ist gegeben durch

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(s)}\,\mathrm{d}s = \int_1^y \frac{1}{s^2}\,\mathrm{d}s = 1 - \frac{1}{y}.$$

Nach Satz 12.2 ergibt sich die Lösung $y\colon I_{x_0} \to \mathbb{R}$ nun durch Auflösen der Gleichung $G(y(x)) = F(x)$ nach $y(x)$, also

$$y(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}$$

Dabei ist das Intervall I_{x_0} das größte Teilintervall von I mit $y_0 \in I_{x_0}$, auf dem y definiert ist und $y(I_{x_0}) \subseteq J = (0,\infty)$, also $I_{x_0} = (-1, \infty)$. Da y in -1 nicht stetig fortsetzbar ist, ist dies das maximale Existenzintervall.

b) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. In der Notation des Satzes 12.2, sei $I = \mathbb{R}$, $J = \mathbb{R}$, $f = \sin$ und $g = \exp$. Eine Stammfunktion von f ist gegeben durch

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^x \sin(s)\,\mathrm{d}s = 1 - \cos(x).$$

Eine Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ ist gegeben durch

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(s)}\,\mathrm{d}s = \int_{-\log(3)}^{y} \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s = 3 - \mathrm{e}^{-y}.$$

Nach Satz 12.2 ergibt sich die Lösung $y\colon I_{x_0} \to \mathbb{R}$ nun durch Auflösen der Gleichung $G(y(x)) = F(x)$ nach $y(x)$, also

$$y(x) = -\log(2 + \cos(x)).$$

Dabei ist das Intervall I_{x_0} das größte Teilintervall von I mit $y_0 \in I_{x_0}$, auf dem y definiert ist, also $I_{x_0} = \mathbb{R}$, was automatisch das maximale Existenzintervall ist.

c) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. In der Notation des Satzes 12.4, sei $I = \mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto -x^2$ und $g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $y \mapsto \frac{1}{y^3}$. Wegen $y_0 = \sqrt{2}$ bietet es sich an, $J = \mathbb{R}^+$ zu wählen (das größte Intervall, welches y_0 enthält und auf dem g das Vorzeichen von $g(y_0) = \frac{\sqrt{2}}{4} > 0$ hat). Eine Stammfunktion von f ist gegeben durch

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^x -s^2\,\mathrm{d}s = -\frac{x^3}{3}.$$

Eine Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ ist gegeben durch

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(s)}\,\mathrm{d}s = \int_{\sqrt{2}}^{y} y^3\,\mathrm{d}s = \frac{y^4}{4} - 1.$$

Nach Satz 12.2 ergibt sich die Lösung $y\colon I_{x_0} \to \mathbb{R}$ nun durch Auflösen der Gleichung $G(y(x)) = F(x)$ nach $y(x)$, also

$$y(x) = \sqrt{2}\sqrt[4]{1 - \frac{x^3}{3}},$$

wobei das Vorzeichen von y durch $y_0 = \sqrt{2}$ festgelegt ist. Dabei ist das Intervall I_{x_0} das größte Teilintervall von I mit $y_0 \in I_{x_0}$, auf dem y definiert ist, also $I_{x_0} = (-\infty, \sqrt[3]{3})$. Da $\lim\limits_{x \to \sqrt[3]{3}} y(x) = 0$ und 0 nicht im Definitionsbereich von g liegt, haben wir das maximale Existenzintervall gefunden. □

Aufgabe 4 (13. November 2026)
In der Zeitschrift *Science* erschien am 4. November 1960 der Artikel *Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026*[1] von Heinz von Foerster, Patricia M. Mora und Lawrence W. Amiot. In diesem Artikel wird das Anfangswertproblem

$$N'(t) = \alpha_0 N(t)^{1+1/k}, \quad N(t_1) = N_1$$

zur Modellierung der Größe der Erdbevölkerung vorgeschlagen. Dabei ist $N(t)$ die Anzahl der Menschen zur Zeit t, die in Jahren nach Christi Geburt gemessen wird. Der Anfangswert ist $N_1 = 3{,}018 \cdot 10^9$ im Jahr $t_1 = 1960$. Die dimensionslosen Konstanten α_0 und k werden dadurch bestimmt, dass das obige Modell bestmöglich an die vorhandenen Daten zur Bevölkerungsentwicklung angepasst wird. Sie werden mit $\alpha_0 = 3{,}9661 \cdot 10^{-12}$ und $k = 0{,}99$ angegeben. Berechnen Sie die sogenannte Blow-Up Zeit $t_0 \in (t_1, \infty)$, für die $\lim\limits_{t \to t_0} N(t) = \infty$ gilt. Zeigen Sie, dass man die Lösung in der Form $N(t) = N_1 \left(\frac{t_0 - t_1}{t_0 - t}\right)^k$ für $t < t_0$ schreiben kann.

Lösungsvorschlag. Mit Trennung der Variablen berechnen wir

$$\frac{k}{\alpha_0}\left(N_1^{-1/k} - N(t)^{-1/k}\right) = \int_{N_1}^{N(t)} \frac{1}{\alpha_0} x^{-1-1/k}\,\mathrm{d}x = \int_{t_1}^{t} 1\,\mathrm{d}s = t - t_1.$$

[1] *Science* 04 Nov 1960: Vol. 132, Issue 3436, pp. 1291-1295, DOI: 10.1126/science.132.3436.1291

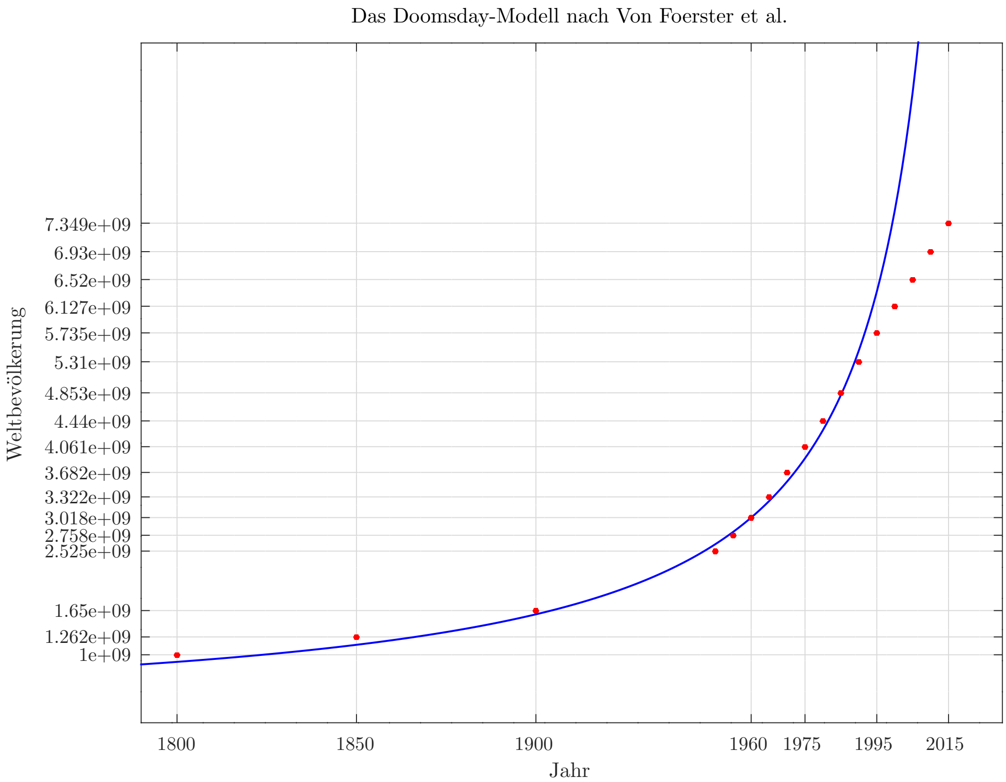

Abbildung 1: Diese Abbildung zeigt die Lösungskurve des Doomsday-Modells und einige Datenpunkte der tatsächlichen Bevölkerungsentwicklung. Die Bevölkerungsdaten sind der Tabelle `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=World_population&oldid=903049270#Past_population` entnommen.

Auflösen nach $N(t)$ liefert

$$N(t) = \frac{1}{\left(N_1^{-1/k} - \frac{\alpha_0}{k}(t-t_1)\right)^k} = \left(\frac{k}{\alpha_0}\right)^k \frac{1}{\left(\frac{k}{\alpha_0}N_1^{-1/k} + t_1 - t\right)^k} = N_1 \left(\frac{t_0 - t_1}{t_0 - t}\right)^k,$$

wobei wir $t_0 = \frac{k}{\alpha_0}N_1^{-1/k} + t_1$ gesetzt und folglich $\left(\frac{k}{\alpha_0}\right)^k = N_1(t_0 - t_1)^k$ verwendet haben. Die Lösung N existiert dabei auf dem Intervall $(-\infty, t_0)$ und für $t \to t_0-$ tritt der Blow-Up $N(t) \to \infty$ auf. Setzt man den gegebenen Anfangswert und die Parameter in die Formel für die Blow-Up Zeit ein, so erhält man

$$t_0 = \frac{k}{\alpha_0}N_1^{-1/k} + t_1 = \frac{0.99}{3.9661 \cdot 10^{-12}}(3{,}018 \cdot 10^9)^{-1/0.99} + 1960 \approx 2026{,}34\ldots.$$

In Abbildung 1 ist die Lösungskurve zu diesen Parametern im Intervall $[1800, 2020]$ zu sehen. Die Punkte markieren die tatsächliche Größe der Weltbevölkerung. Man sieht, dass das Doomsday-Modell bis Anfang der 1990er Jahre eine zutreffende Prognose geliefert hat. $\square$

Aufgabe 5 (Die logistische Gleichung)
Sei $a > 0$. Bestimmen Sie für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$ die Lösung des Anfangswertproblems $y' = (a-y)y$, $y(0) = y_0$, ihr maximales Existenzintervall sowie, falls existent, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y(x)$.

Lösungsvorschlag. Im Fall $y_0 = 0$ oder $y_0 = a$ lautet die Lösung $y = 0$. Sie ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Sei $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, a\}$. Wir betrachten zunächst den Fall $y_0 \in (0, a)$. Mit Trennung der Variablen berechnen wir

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}\log\left(\frac{y(x)}{a-y(x)}\right) - \frac{1}{a}\log\left(\frac{y_0}{a-y_0}\right) &= \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{a}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{a-t}\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{t(a-t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x\end{aligned}.$$

Auflösen nach x liefert

$$\frac{y(x)}{a-y(x)} = \frac{y_0}{a-y_0}\mathrm{e}^{ax}$$

und ferner

$$y(x) = \frac{a\mathrm{e}^{ax}y_0}{a - y_0 + \mathrm{e}^{ax}y_0} = \frac{ay_0}{\mathrm{e}^{-ax}(a-y_0) + y_0}.$$

Diese Lösung existiert also auf ganz $\mathbb{R}$ und wir können an der Formel direkt

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = a \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$$

ablesen.

Als nächstes betrachten wir den Fall $y_0 > a$. Hier muss man beim Integrieren beachten, dass in einer Umgebung von y_0 die Funktion $x \mapsto \frac{1}{a-x}$ negativ ist und ihre Stammfunktion somit $x \mapsto -\log(x-a)$ lautet. Wir erhalten dann also

$$\log\left(\frac{y(x)}{y(x)-a}\right) - \log\left(\frac{y_0}{y_0-a}\right) = ax.$$

Auflösen nach $y(x)$ führt dann auf die Lösungsformel

$$y(x) = \frac{a\mathrm{e}^{ax}y_0}{\mathrm{e}^{ax}y_0 - y_0 + a} = \frac{ay_0}{y_0 - \mathrm{e}^{-ax}(y_0-a)}.$$

Wir sehen hier, dass die Lösung auf dem Intervall $\left(\frac{1}{a}\log\left(1-\frac{a}{y_0}\right), \infty\right)$ existiert und

$$\lim_{x\to\frac{1}{a}\log\left(1-\frac{a}{y_0}\right)+} y(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} y(x) = 1$$

erfüllt.

Schließlich bleibt noch der Fall $y_0 < 0$. In diesem Fall muss man beachten, dass die Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{x}$ in einer Umgebung von y_0 durch $x \mapsto \log(-x)$ gegeben ist. Wir erhalten damit

$$\log\left(\frac{y(x)}{y(x)-a}\right) - \log\left(\frac{y_0}{y_0-a}\right) = ax.$$

Auflösen führt auf

$$y(x) = \frac{a\mathrm{e}^{ax}y_0}{\mathrm{e}^{ax}y_0 + a - y_0}$$

für alle $x \in \left(-\infty, \frac{1}{a}\log\left(1-\frac{a}{y_0}\right)\right)$. Wir sehen, dass

$$\lim_{x\to\frac{1}{a}\log\left(1-\frac{a}{y_0}\right)-} y(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$$

gelten. □

Aufgabe 6

Sei $f \in C(\mathbb{R})$. Die Funktion $\rho \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ erfülle die strikte Differentialungleichung

$$\rho'(x) < f(\rho(x))$$

für alle $x \in (a,b]$. Sei außerdem $y \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = f(y(x)), \qquad y(a) = y_0$$

für ein $y_0 > \rho(a)$. Zeigen Sie, dass $\rho(x) < y(x)$ für alle $x \in [a,b]$ gilt. Dieselbe Aussage gilt, wenn man alle Ungleichungszeichen umkehrt.

Lösungsvorschlag. Angenommen die Behauptung, dass $\rho(x) < y(x)$ für alle $x \in [a,b]$ gelte, wäre falsch. Definiere

$$M = \{x \in [a,b] : \rho(x) \geq y(x)\}.$$

Die Menge M ist dann nicht leer und wir setzen $x_* = \inf M$. Es gibt also eine Folge $(x_n)_n$ in M die gegen x_* konvergiert und die $\rho(x_n) \geq y(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Da die Funktionen ρ und y stetig sind, folgt $\rho(x_*) \geq y(x_*)$. Außerdem gilt $\rho(x) < y(x)$ für alle $t \in [a, x_*)$ nach Definition von M, also erhalten wir sogar $\rho(x_*) = y(x_*)$. Die vorausgesetzte Differentialungleichung bzw. die Differentialgleichung besagen, dass die Ungleichung

$$\rho'(x_*) < f(\rho(x_*)) = f(y(x_*)) = y'(x_*)$$

gilt. Andererseits betrachten wir eine Folge $\tilde{x}_n \in (a, x_*)$ mit $\tilde{x}_n \to x_*$ für $n \to \infty$. Wir erhalten aus der Definition der Ableitung über den Differenzenquotienten und wegen $\rho(\tilde{x}_n) < y(\tilde{x}_n)$, dass

$$\rho'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\rho(\tilde{x}_n) - \rho(x_*)}{\tilde{x}_n - x_*} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{y(\tilde{x}_n) - y(x_*)}{\tilde{x}_n - x_*} = y'(x_*)$$

gilt. Diese beiden Ungleichungen widersprechen sich und somit ist die Annahme falsch. $\square$