Karlsruher Institut für Technologie

24. Januar 2020
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dr. Andreas Geyer-Schulz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschlag zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 1

Seien $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ und $g\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ stetig.

W F
☐ ■ $\lim\limits_{x\to\infty} |f(x)| = 0 \Rightarrow \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert.

Diese Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir $f(x) = \frac{1}{x+1}$ für $x \in [0,\infty)$. Dann ist f stetig und es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} |f(x)| = 0$. Wegen

$$\int_0^R \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \log(R+1) \to \infty$$

für $R \to \infty$, ist das uneigentliche Integral nicht konvergent.

W F
☐ ■ $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} |f(x)| = 0$.

Wir definieren die stetige Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$h(x) = \begin{cases} 1+x, & x \in [-1,0], \\ 1-x, & x \in (0,1], \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]. \end{cases}$$

Es gilt

$$\int_{-1}^1 h(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ definieren wir $h_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $h_n(x) = h(n^2(x-n))$ für $x \in \mathbb{R}$. Es gilt $h_n(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus (n - \frac{1}{n^2}, n + \frac{1}{n^2})$ und wir berechnen mit der Substitution $y = n^2(x-n)$ das Integral

$$\int_{n-\frac{1}{n^2}}^{n+\frac{1}{n^2}} h_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{n-\frac{1}{n^2}}^{n+\frac{1}{n^2}} h(n^2(x-n))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}\int_{-1}^1 h(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{n^2}.$$

Wir definieren nun $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \sum_{n=2}^\infty h_n(x), \quad x \in [0,\infty),$$

und erhalten so eine stetige Funktion f mit der Eigenschaft $f(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Insbesondere gilt also nicht $\lim\limits_{x\to\infty} |f(x)| = 0$. Allerdings gilt

$$\int_0^R f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\lceil R\rceil + \frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{\lceil R\rceil} \int_{n-\frac{1}{n^2}}^{n+\frac{1}{n^2}} h_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{\lceil R\rceil} \frac{1}{n^2} \to \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty$$

für $R \to \infty$. Folglich ist das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergent.

W F
■ □ $\int_0^1 g(x)^2 \, \mathrm{d}x$ konvergiert $\Rightarrow \int_0^1 g(x) \, \mathrm{d}x$ konvergiert.

Diese Aussage ist wahr. Das uneigentliche Integral $\int_0^1 g(x)^2 \, \mathrm{d}x$ sei konvergent. Es folgt

$$\int_r^1 |g(x)| \, \mathrm{d}x \leq \frac{1}{2} \int_r^1 (1 + g(x)^2) \, \mathrm{d}x \to \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 g(x)^2 \, \mathrm{d}x$$

für $r \to 0+$. Damit ist nach dem Majorantenkriterium auch $\int_0^1 g(x) \, \mathrm{d}x$ absolut konvergent.

W F
□ ■ $\int_0^1 g(x) \, \mathrm{d}x$ konvergiert $\Rightarrow \int_0^1 g(x)^2 \, \mathrm{d}x$ konvergiert.

Diese Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir die Funktion $g\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = x^{-1/2}$ für $x \in (0,1]$. Wir haben

$$\int_r^1 g(x) \, \mathrm{d}x = \int_r^1 x^{-1/2} \, \mathrm{d}x = \left[2x^{1/2}\right]_r^1 = 2 - 2\sqrt{r} \to 2$$

für $r \to 0+$, aber

$$\int_r^1 g(x)^2 \, \mathrm{d}x = \int_r^1 x^{-1} \, \mathrm{d}x = [\log(x)]_r^1 = -\log(r) \to \infty$$

für $r \to 0+$.

Aufgabe 2

Seien $\gamma, \omega_0 > 0$ mit $\omega_0 > \gamma$. Bestimmen Sie jeweils die maximale Lösung der folgenden Anfangswertprobleme.

a) $y''(x) + 2\gamma y'(x) + \omega_0^2 y(x) = \sin(\omega_0 x), \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0.$

b) $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \mathrm{e}^{2x}, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0.$

c) $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = \mathrm{e}^{x} \cos(x), \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0, \; y'(\frac{\pi}{2}) = 0.$

Lösungsvorschlag.

a) Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Zunächst bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm \mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Wir setzen $\omega = \omega_0^2 - \gamma > 0$. Nach Satz 12.4 der Vorlesung ist also

$$y_h(x) = c_1 \mathrm{e}^{-\gamma x} \cos(\omega x) + c_2 \mathrm{e}^{-\gamma x} \sin(\omega x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y''(x) + 2\gamma y'(x) + \omega^2 y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

In der Notation der Vorlesung (nach Satz 12.5) gilt für unsere Inhomogenität $m = 0$, $\alpha = 0$ und $\beta = \omega_0$. Da $\mathrm{i}\omega_0$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = A\cos(\omega_0 x) + B\sin(\omega_0 x)$$

für eine spezielle Lösung der Differentialgleichung. Die Ableitungen sind durch

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= \omega_0\left(-A\sin(\omega_0 x) + B\cos(\omega_0 x)\right) \\ y_p''(x) &= \omega_0^2\left(-A\cos(\omega_0 x) - B\sin(\omega_0 x)\right) \end{aligned}$$

gegeben. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} &y_p''(x) + 2\gamma y_p'(x) + \omega_0^2 y_p(x) \\ &\quad = \left(-A\omega_0^2 + B2\gamma\omega_0 + A\omega_0^2\right)\cos(\omega_0 x) + \left(-B\omega_0^2 - A2\gamma\omega_0 + B\omega_0^2\right)\sin(\omega_0 x) \\ &\quad = 2\gamma\omega_0 B\cos(\omega_0 x) - 2\gamma\omega_0 A\sin(\omega_0 x) \\ &\quad \overset{!}{=} \sin(\omega_0 x). \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist für $B = 0$ und $A = -\frac{1}{2\gamma\omega_0}$ erfüllt. Also ist

$$y_p(x) = -\frac{1}{2\gamma\omega_0}\cos(\omega_0 x)$$

eine spezielle Lösung der Differentialgleichung und die maximale Lösung des Anfangswertproblems ist durch

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1\mathrm{e}^{-\gamma x}\cos(\omega x) + c_2\mathrm{e}^{-\gamma x}\sin(\omega x) - \frac{1}{2\gamma\omega_0}\cos(\omega_0 x)$$

gegeben, wobei die Konstanten c_1 und c_2 so gewählt werden müssen, dass die Anfangswertbedingungen erfüllt sind. Es ist

$$c_1 - \frac{1}{2\gamma\omega_0} = y(0) \overset{!}{=} y_0 = 1,$$

also $c_1 = 1 + \frac{1}{2\gamma\omega_0}$, und wegen

$$y'(x) = -\gamma\mathrm{e}^{-\gamma x}\cos(\omega x) - \omega\mathrm{e}^{-\gamma x}\sin(\omega x) - c_2\gamma\mathrm{e}^{-\gamma x}\sin(\omega x) + c_2\omega\mathrm{e}^{-\gamma x}\cos(\omega x) + \frac{1}{2\gamma}\sin(\omega_0 x)$$

ist

$$-c_1\gamma + c_2\omega = y'(0) \overset{!}{=} y_1 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{c_1\gamma}{\omega} = \frac{1}{\omega}\left(\gamma + \frac{1}{2\omega_0}\right)$$

und die maximale Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$\begin{aligned} y(x) = &\left(1 + \frac{1}{2\gamma\omega_0}\right)\mathrm{e}^{-\gamma x}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}x\right) + \frac{1}{\omega}\left(\gamma + \frac{1}{2\omega_0}\right)\mathrm{e}^{-\gamma x}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}x\right) \\ &- \frac{1}{2\gamma\omega_0}\cos(\omega_0 x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Zunächst bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{1-1} = -1$$

Nach Satz 12.4 der Vorlesung ist also

$$y_h(x) = c_1 \mathrm{e}^{-x} + c_2 t \mathrm{e}^{-x}$$

die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0.$$

In der Notation der Vorlesung (nach Satz 12.5) gilt für unsere Inhomogenität $m = 0$, $\alpha = 2$ und $\beta = 0$. Da 2 keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = A\mathrm{e}^{2x}$$

für eine spezielle Lösung der Differentialgleichung. Die Ableitungen sind durch

$$y_p'(x) = 2A\mathrm{e}^{2x},$$
$$y_p''(x) = 4A\mathrm{e}^{2x}$$

gegeben. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$y_p''(x) + 2y_p'(x) + y_p(x) = 4A\mathrm{e}^{2x} + 2 \cdot 2A\mathrm{e}^{2x} + A\mathrm{e}^{2x} = 9A\mathrm{e}^{2x} \overset{!}{=} \mathrm{e}^{2x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Diese Gleichung ist für $A = \frac{1}{9}$ erfüllt. Also ist

$$y_p(x) = \frac{1}{9}\mathrm{e}^{2x}$$

eine spezielle Lösung der Differentialgleichung und die maximale Lösung des Anfangswertproblems ist durch

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1\mathrm{e}^{-x} + c_2 x\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{9}\mathrm{e}^{2x}$$

gegeben, wobei die Konstanten c_1 und c_2 so gewählt werden müssen, dass die Anfangswertbedingungen erfüllt sind. Es ist

$$y(0) = c_1 + \frac{1}{9} \overset{!}{=} y_0 = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{8}{9}$$

und wegen

$$y'(x) = -\frac{8}{9}\mathrm{e}^{-x} - c_2 x\mathrm{e}^{-x} + c_2\mathrm{e}^{-x} + \frac{2}{9}\mathrm{e}^{2x}$$

ist

$$y'(0) = -\frac{8}{9} + c_2 + \frac{2}{9} = c_2 - \frac{6}{9} \overset{!}{=} y_1 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{6}{9}$$

und die maximale Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$y(x) = \frac{8}{9}\mathrm{e}^{-x} + \frac{6}{9}x\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{9}\mathrm{e}^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

c) Das charakteristische Polynom ist gegeben durch $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$, welche die Nullstellen $1 \pm \mathrm{i}$ besitzt. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist demnach gegeben durch

$$y_h(x) = c_1 \mathrm{e}^x \cos(x) + c_2 \mathrm{e}^x \sin(x).$$

Die rechte Seite hat die Form $\mathrm{e}^{\alpha x} \cos(\beta x)$ mit $\alpha = \beta = 1$. Da $\alpha + \mathrm{i}\beta$ somit eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, lautet der korrekte Ansatz für die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = \mathrm{e}^x (Ax\cos(x) + Bx\sin(x)).$$

Es ergibt sich

$$y_p'(x) = y_p(x) + \mathrm{e}^x (A\cos(x) + B\sin(x) - Ax\sin(x) + Bx\cos(x))$$

sowie

$$\begin{aligned} y_p''(x) &= y_p'(x) + \mathrm{e}^x (A\cos(x) + B\sin(x) - Ax\sin(x) + Bx\cos(x)) \\ &\quad + \mathrm{e}^x (-A\sin(x) + B\cos(x) - A\sin(x) + B\cos(x) + Ax\cos(x) - Bx\sin(x)) \\ &= y_p'(x) + \mathrm{e}^x (A\cos(x) + B\sin(x) - Ax\sin(x) + Bx\cos(x)) + 2\mathrm{e}^x (B\cos(x) - A\sin(x)) \\ &\quad + \mathrm{e}^x (Ax\cos(x) + Bx\sin(x)) - 2Bx\mathrm{e}^x \sin(x) \\ &= 2y'(p) + 2\mathrm{e}^x (B\cos(x) - A\sin(x)) - 2Bx\mathrm{e}^x \sin(x) \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die inhomogene Differentialgleichung ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} &y_p''(x) - 2y_p'(x) + 2y_p(x) \\ &\quad = 2\mathrm{e}^x (B\cos(x) - A\sin(x)) - 2Bx\mathrm{e}^x \sin(x) + 2\mathrm{e}^x (Ax\cos(x) + Bx\sin(x)) \\ &\quad = 2B\mathrm{e}^x \cos(x) - 2A\mathrm{e}^x \sin(x) + 2Ax\mathrm{e}^x \cos(x) = \mathrm{e}^x \cos(x). \end{aligned}$$

Somit gilt $A = 0$, $B = \frac{1}{2}$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist also gegeben durch

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^x \cos(x) + c_2 \mathrm{e}^x \sin(x) + \frac{1}{2} x \mathrm{e}^x \sin(x).$$

Einsetzen der Anfangswerte liefert

$$0 = y(\frac{\pi}{2}) = c_2 \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{4} \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}},$$

also $c_2 = -\frac{\pi}{4}$. Wegen

$$y'(x) = \mathrm{e}^x \sin(x) \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - c_1 \right) + \mathrm{e}^x \cos(x) \left(\frac{\pi}{4} + c_1 \right) + \frac{1}{2} x \mathrm{e}^x (\sin(x) + \cos(x))$$

folgt schließlich

$$0 = y'(\frac{\pi}{2}) = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} - c_1 \right) + \frac{\pi}{4} \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}},$$

also $c_1 = \frac{1}{2}$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist demnach gegeben durch

$$y(x) = \frac{1}{2} \mathrm{e}^x \cos(x) - \frac{\pi}{4} \mathrm{e}^x \sin(x) + \frac{1}{2} x \mathrm{e}^x \sin(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{2} \left(\left(x - \frac{\pi}{2} \right) \sin(x) + \cos(x) \right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. □

Aufgabe 3
Seien $s \in (-\infty, 0)$ und $x \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert

a) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{st}\cos(tx)\,\mathrm{d}t,$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t\log(t)}{\sinh(t)-t}\,\mathrm{d}t,$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^3 \frac{\mathrm{e}^{2t}}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t,$

d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \log(|t|)\,\mathrm{d}t.$

Lösungsvorschlag.

a) Sei $b > 0$. Es gilt mit zweimaliger partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_0^b \mathrm{e}^{st}\cos(tx)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{s}\Big[\mathrm{e}^{st}\cos(tx)\Big]_{t=0}^{t=b} + \frac{x}{s}\int_0^b \mathrm{e}^{st}\sin(tx)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{s}(\mathrm{e}^{sb}\cos(bx)-1) + \frac{x}{s^2}\Big[\mathrm{e}^{st}\sin(xt)\Big]_{t=0}^{t=b} - \frac{x^2}{s^2}\int_0^b \mathrm{e}^{st}\cos(xt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{s}(\mathrm{e}^{sb}\cos(bx)-1) + \frac{x}{s^2}\mathrm{e}^{sb}\sin(xb) - \frac{x^2}{s^2}\int_0^b \mathrm{e}^{st}\cos(xt)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Addieren von $\frac{x^2}{s^2}\int_0^b \mathrm{e}^{st}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ auf beiden Seiten liefert

$$\left(1+\frac{x^2}{s^2}\right)\int_0^b \mathrm{e}^{st}\cos(xt)\,\mathrm{d}t = \frac{s^2+x^2}{s^2}\int_0^b \mathrm{e}^{st}\cos(xt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s}(\mathrm{e}^{sb}\cos(bx)-1)+\frac{x}{s^2}\mathrm{e}^{sb}\sin(bx)$$

und damit

$$\int_0^b \mathrm{e}^{st}\cos(xt)\,\mathrm{d}t = -\frac{s}{s^2+x^2} + \frac{s}{s^2+x^2}\mathrm{e}^{sb}\cos(bx) + \frac{x}{s^2+x^2}\mathrm{e}^{sb}\sin(bx).$$

Wegen

$$\Big|\mathrm{e}^{sb}\cos(bx)\Big| \le \mathrm{e}^{sb} \to 0 \quad \text{sowie} \quad \Big|\mathrm{e}^{sb}\sin(bx)\Big| \le \mathrm{e}^{sb} \to 0 \quad \text{für } b\to\infty,$$

ist das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \mathrm{e}^{st}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ konvergent und es gilt:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{e}^{st}\cos(xt)\,\mathrm{d}t &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{st}\cos(xt)\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{s}{s^2+x^2} + \frac{s}{s^2+x^2}\mathrm{e}^{sb}\cos(bx) + \frac{x}{s^2+x^2}\mathrm{e}^{sb}\sin(bx)\right) \\ &= -\frac{s}{s^2+x^2}.\end{aligned}$$

b) Wir untersuchen den Integranden in der Nähe der unteren Grenze. Es gilt

$$\log(t) \le \log\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = -1$$

für alle $0 < t \leq \frac{1}{\mathrm{e}}$. Ferner folgt aus der Potenzreihendarstellung des sinh (vgl. Paragraph 9 der Vorlesung) und einer Indexverschiebung, dass

$$\begin{aligned}0 < \sinh(t) - t &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1} - t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)!} t^{2n+3} = t^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)!} t^{2n}\end{aligned}$$

für alle $0 < t \leq \frac{1}{\mathrm{e}}$ gilt. Wir definieren $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ durch $h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)!} t^{2n}$ für $t \in \mathbb{R}$. Die Funktion h ist durch eine Potenzreihe mit unednlichem Konvergenzradius gegeben, insbesondere ist h also stetig. Als stetige Funktion nimmt sie auf kompakten Intervallen ihr Maximum an, also existiert ein $M > 0$ mit $0 < h(t) \leq M$ für alle $0 \leq t \leq \frac{1}{\mathrm{e}}$. Also gilt

$$-\frac{t\log(t)}{\sinh(t) - t} \geq \frac{t\log(\mathrm{e})}{t^3 h(t)} \geq \frac{1}{t^2 M}$$

für alle $0 < t \leq \frac{1}{\mathrm{e}}$. Wegen

$$\int_a^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \frac{1}{t^2 M}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{M}\left[\frac{1}{t}\right]_{t=a}^{t=\frac{1}{\mathrm{e}}} = \frac{1}{M}\left(\frac{1}{a} - \mathrm{e}\right) \to \infty$$

für $a \to 0+$, ist das uneigentliche Integral $\int_0^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \frac{1}{t^2 M}\,\mathrm{d}t$ divergent. Nach dem Minorantenkriterium aus Satz 13.5 der Vorlesung ist dann auch das uneigentliche Integral

$$-\int_0^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \frac{t\log(t)}{\sinh(t) - t}\,\mathrm{d}t$$

divergent. Somit ist das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{t\log(t)}{\sinh(t) - t}\,\mathrm{d}t$$

ebenfalls divergent.

c) Sei $a < 3$. Mit der Substitution $s = \mathrm{e}^t$ berechnen wir

$$\begin{aligned}\int_a^3 \frac{\mathrm{e}^{2t}}{1 + \mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t &= \int_{\mathrm{e}^a}^{\mathrm{e}^3} \frac{s^2}{1+s}\frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \int_{\mathrm{e}^a}^{\mathrm{e}^3} \frac{1+s-1}{1+s}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{\mathrm{e}^a}^{\mathrm{e}^3} 1 - \frac{1}{1+s}\,\mathrm{d}s = [s - \log(1+s)]_{s=\mathrm{e}^a}^{s=\mathrm{e}^3} \\ &= \mathrm{e}^3 - \log(1+\mathrm{e}^3) - \mathrm{e}^a + \log(1+\mathrm{e}^a) \to \mathrm{e}^3 - \log(1+\mathrm{e}^3)\end{aligned}$$

für $a \to -\infty$. Damit ist das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^3 \frac{\mathrm{e}^{2t}}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$ konvergent und es gilt

$$\int_{-\infty}^3 \frac{\mathrm{e}^{2t}}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^3 - \log(1+\mathrm{e}^3).$$

d) Per Definition ist das uneigentliche Integral $\int_{-1}^{1} \log(|t|)\,\mathrm{d}t$ genau dann konvergent, wenn die beiden uneigentlichen Integrale $\int_{-1}^{0} \log(|t|)\,\mathrm{d}t$ und $\int_{0}^{1} \log(|t|)\,\mathrm{d}t$ konvergent sind. In diesem Fall ist

$$\int_{-1}^{1} \log(|t|)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} \log(|t|)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} \log(|t|)\,\mathrm{d}t.$$

Sei $0 < a < 1$. Mit der Substitution $s = -t$ erhalten wir

$$\int_{-1}^{-a} \log(|t|)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{1} \log(s)\,\mathrm{d}s = \int_{a}^{1} \log(|t|)\,\mathrm{d}t.$$

Daher reicht es, nur eins der beiden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz zu untersuchen. Es gilt

$$\int_{a}^{1} \log(t)\,\mathrm{d}t = \big[t\log(t) - t\big]_{t=a}^{t=1} = (-1 - a\log(a) + a)$$

sowie, mit der Regel von L'Hospital im letzten Schritt,

$$\lim_{a\to 0+} (a - a\log(a)) = \lim_{a\to 0+} a\log\left(\frac{1}{a}\right) = \lim_{a\to 0+} \frac{\log\left(\frac{1}{a}\right)}{\frac{1}{a}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Folglich ist $\int_{0}^{1} \log(|t|)\,\mathrm{d}t$ konvergent und es gilt:

$$\int_{0}^{1} \log(|t|)\,\mathrm{d}t = \lim_{a\to 0+} \int_{a}^{1} \log(|t|)\,\mathrm{d}t = -1$$

und damit

$$\int_{-1}^{1} \log(|t|)\,\mathrm{d}t = -2.$$

□

Aufgabe 4

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t} - t^2}\,\mathrm{d}t,$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\log(1+t)\,\mathrm{d}t,$

c) $\displaystyle\int_0^1 (\log(t))^4\,\mathrm{d}t,$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\pi}} \sin\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t.$

Lösungsvorschlag.

a) Für alle $0 < t \le 1$ gilt $t^2 \le t \le \sqrt{t}$. Damit folgt

$$0 < \left|\frac{1}{2\sqrt{t} - t^2}\right| = \frac{1}{\sqrt{t} + (\sqrt{t} - t^2)} \le \frac{1}{\sqrt{t}}$$

für alle $0 < t \le 1$. Sei $0 < a < 1$. Es gilt

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\left[\sqrt{t}\right]_{t=a}^{t=1} = 2 - 2\sqrt{a} \to 2$$

für $a \to 0+$. Also ist das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ konvergent. Nach dem Majorantenkriterium aus der Vorlesung ist auch das Integral $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}-t^2}\,\mathrm{d}t$ (absolut) konvergent.

b) Sei $b > 0$. Mit partieller Integraltion berechnen wir

$$\int_0^b \mathrm{e}^{-t} \log(1+t)\,\mathrm{d}t = -\Big[\mathrm{e}^{-t}\log(1+t)\Big]_{t=0}^{t=b} + \int_0^b \mathrm{e}^{-t}\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{\log(1+b)}{\mathrm{e}^b} + \int_0^b \mathrm{e}^{-t}\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Wegen

$$\lim_{b\to\infty}\frac{\log(1+b)}{\mathrm{e}^b} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{(1+b)\mathrm{e}^b} = 0,$$

ist das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\log(1+t)\,\mathrm{d}t$ genau dann konvergent, wenn das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$ konvergent ist. Dieses ist tatsächlich der Fall nach dem Majorantenkriterium aus Satz 13.5 der Vorlesung, weil für alle $0 \le t < \infty$

$$\mathrm{e}^{-t}\frac{1}{1+t} \le \mathrm{e}^{-t}$$

gilt, und

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty} -\Big[\mathrm{e}^{-t}\Big]_{t=0}^{t=b} = 1 - \lim_{b\to\infty}\mathrm{e}^{-b} = 1.$$

c) Sei $0 < a < 1$. Mit der Substitution $t = \mathrm{e}^{-s}$ berechnen wir

$$\int_a^1 (\log(t))^4\,\mathrm{d}t = -\int_{-\log(a)}^0 s^4\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s = \int_0^{\log\left(\frac{1}{a}\right)} s^4\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s.$$

Wegen $\lim_{a\to 0+}\log\left(\frac{1}{a}\right) = \infty$, ist das uneigentliche Integral $\int_0^1 (\log(t))^4\,\mathrm{d}t$ konvergent, wenn das uneigentliche Integral $\int_0^\infty s^4\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s$ konvergent ist. Dies ist nach Aufgabe 7 tatsächlich der Fall.

d) Auf $(0,1]$ gilt $\sin(\frac{1}{t}) \le 1$. Da das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 1\,\mathrm{d}t = \lim_{a\to 0}\int_a^1 1\,\mathrm{d}t = \lim_{a\to 0} 1 - a = 1$$

konvergiert, liefert das Majorantenkriterium auch die Konvergenz des gesuchten Integrals. □

Aufgabe 5

Untersuchen Sie die folgenden Reihe auf Konvergenz durch Vergleich mit einem Integral.

a) $\displaystyle\sum_{k=3}^\infty \frac{(\log k)^2}{k^{\log\log k}}$, b) $\displaystyle\sum_{k=3}^\infty \frac{1}{(\log k)^{\log k}}$.

Lösungsvorschlag.

a) Wir berechnen für $t > 1$ mit $f(t) = (\log(t))^2 t^{-\log(\log(t))} = (\log(t))^2 \mathrm{e}^{-\log(t)\cdot\log(\log(t))}$, dass

$$f'(t) = 2(\log(t))\frac{1}{t}t^{-\log(\log(t))} + (\log(t))^2\left(t^{-\log(\log(t))}\left(-\frac{1}{t} - \frac{1}{t}\log(\log(t))\right)\right)$$
$$= -t^{-1-\log(\log(t))}\log(t)(\log(t)(1+\log(\log(t))) - 2).$$

Es gibt also ein $c \in (1,\infty)$, so dass für $t \geq c$ die Funktion $t \mapsto (\log(t))^2 t^{-\log(\log(t))}$ monoton fällt. Mit der Substitution $x = \log(t)$ erhalten wir

$$\int_c^\infty \frac{(\log(t))^2}{t^{\log(\log(t))}}\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\int_c^b \frac{(\log(t))^2}{t^{\log(\log(t))}}\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\int_{\log(c)}^{\log(b)} x^2 \mathrm{e}^{x - x\log(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Sei $g(x) := x - x\log(x)$. Dann gilt $g'(x) = -\log(x)$ für $x > 0$ und damit $g'(x) < -1$ für $x > \mathrm{e}$. Zudem ist $g(\mathrm{e}^2) = -\mathrm{e}^2$ und somit

$$g(x) = g(\mathrm{e}^2) + \int_{\mathrm{e}^2}^x g'(y)\,\mathrm{d}y < -\mathrm{e}^2 + \int_{\mathrm{e}^2}^x (-1)\,\mathrm{d}y = -x.$$

Wegen der Monotonie der Exponentialfunktion folgt für $x > \mathrm{e}^2$, dass $\mathrm{e}^{x-x\log(x)} < \mathrm{e}^{-x}$. Da nach Aufgabe 7 $\int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x < \infty$ gilt, konvergiert das Integral nach dem Majorantenkriterium und die Reihe nach Satz 13.6.

b) Die Funktion $t \mapsto (\log(t))^{-\log(t)}$ ist für $t \geq \mathrm{e}$ monoton fallend. Die Substitution $x = \log(t)$ liefert

$$\int_3^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(\log(t))^{\log(t)}} = \int_{\log 3}^\infty \frac{\mathrm{e}^x}{x^x}\,\mathrm{d}x = \int_{\log 3}^\infty \mathrm{e}^{x-x\log(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Wie in Teil a) berechnet, gilt $\mathrm{e}^{x-x\log(x)} < \mathrm{e}^{-x}$ für $x > \mathrm{e}^2$ und da das uneigentliche Integral $\int_{\mathrm{e}^2}^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ existiert, konvergiert auch das Ausgangsintegral und nach Satz 13.6 die gegebene Reihe. □

Aufgabe 6

Sei $s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Wir betrachten das uneigentliche Integral

$$I_s := \int_0^\infty \frac{1}{x^s + x^{1/s}}\,\mathrm{d}x.$$

Bestimmen Sie alle s, für die I_s konvergiert.

Lösungsvorschlag. 1. Fall: $s < 0$. Für jedes $x \geq 1$ gilt $x^s \leq x^0 = 1$ und $x^{1/s} \leq x^0 = 1$, so dass $\frac{1}{x^s+x^{1/s}} \geq \frac{1}{2}$ ist. Wegen der Divergenz von $\int_1^\infty \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x$ liefert das Minorantenkriterium die Divergenz des uneigentlichen Integrals $\int_1^\infty \frac{1}{x^s+x^{1/s}}\,\mathrm{d}x$. Infolgedessen ist I_s divergent.

2. Fall: $s \in (0,1)$. Wir zeigen, dass sowohl $\int_0^1 \frac{1}{x^s+x^{1/s}}\,\mathrm{d}x$ als auch $\int_1^\infty \frac{1}{x^s+x^{1/s}}\,\mathrm{d}x$ konvergieren. Hieraus folgt dann die Konvergenz von I_s.

Für jedes $x > 0$ gilt $\frac{1}{x^s+x^{1/s}} \leq \frac{1}{x^s}$. Da $\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x$ gemäß Beispiel (1) nach Definition 2 in Paragraph 13 konvergiert, ist $\int_0^1 \frac{1}{x^s+x^{1/s}}\,\mathrm{d}x$ nach dem Majorantenkriterium konvergent.

Für jedes $x > 0$ gilt $\frac{1}{x^s+x^{1/s}} \leq \frac{1}{x^{1/s}}$. Da $\int_1^\infty \frac{1}{x^{1/s}}\,\mathrm{d}x$ wegen $1/s > 1$ konvergiert (vgl. Beispiel (1)), ist $\int_1^\infty \frac{1}{x^s+x^{1/s}}\,\mathrm{d}x$ nach dem Majorantenkriterium konvergent.

3. Fall: $s = 1$. Das uneigentliche Integral $I_1 = \int_0^\infty \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x$ ist divergent.

4. Fall: $s > 1$. Ist $q := 1/s$ gesetzt, so gilt $q \in (0, 1)$. Daher konvergiert laut Fall 2

$$I_q = \int_0^\infty \frac{1}{x^q + x^{1/q}}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{x^{1/s} + x^s}\,\mathrm{d}x = I_s.$$

Insgesamt stellen wir fest, dass I_s genau dann konvergent ist, wenn $s > 0$ und $s \neq 1$ gelten. □

Aufgabe 7

Es sei $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ das uneigentliche Integral

$$I_n(\lambda) := \int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

konvergiert und berechnen Sie $I_n(\lambda)$.

Lösungsvorschlag. Wir zeigen zunächst, dass das uneigentliche Integral $I_0(1)$ konvergiert und dass sein Wert 1 ist.

$$I_0(1) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_{x=0}^R = \lim_{R\to\infty} -\mathrm{e}^{-R} + \mathrm{e}^{-0} = 1.$$

Nun sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} I_n(1) &= \lim_{R\to\infty} \int_0^R x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \left(\left[x^n(-\mathrm{e}^{-x})\right]_{x=0}^R - \int_0^R n x^{n-1}(-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x \right) \\ &= \lim_{R\to\infty} -R^n \mathrm{e}^{-R} + n I_{n-1}(1) = n I_{n-1}(1). \end{aligned}$$

Aus dieser Rekursionsformel folgt per vollständiger Induktion, dass das Integral $I_n(1)$ konvergiert und den Wert $n!$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ besitzt.

Für $n = 0$ wurde dies bereits am Anfang gezeigt. Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wir nehmen an, dass das Integral $I_n(1)$ konvergiere und gelte $I_n(1) = n!$ gelte. Damit ergibt sich

$$I_{n+1}(1) = (n+1) I_n(1) = (n+1) n! = (n+1)!.$$

Vollständige Induktion liefert also die Behauptung $I_n(1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Für jedes $\lambda > 0$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ führt die Substitution $y = \lambda x$ auf

$$\begin{aligned} I_n(\lambda) &= \lim_{R\to\infty} \int_0^R x^n \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_0^{\lambda R} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^n \mathrm{e}^{-y}\,\frac{\mathrm{d}y}{\lambda} = \lambda^{-(n+1)} \lim_{R\to\infty} \int_0^{\lambda R} y^n \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y \\ &= \lambda^{-(n+1)} I_n(1) = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}. \end{aligned}$$

□