23. Januar 2020
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dr. Andreas Geyer-Schulz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

13. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Wahr oder falsch?)
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $v_1, \dots, v_n \in V$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

a) W □ F □ Jede Menge M von Vektoren aus V mit $0 \in M$ ist linear abhängig.

b) W □ F □ Ist $M := \{v_1, \dots, v_n\}$ linear abhängig, so lässt sich jeder Vektor aus M als Linearkombination der anderen Vektoren aus M darstellen.

c) W □ F □ Existiert ein $v \in V$ mit eindeutiger Darstellung als Linearkombination der $v_1, \dots, v_n$, dann sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig.

d) W □ F □ Sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig und $v \in V$, dann sind $v_1 + v, v_2 + v, \dots, v_n + v$ linear unabhängig.

e) W □ F □ Sind v_1, v_2 linear unabhängig und sind v_1, v_3 linear unabhängig, so sind auch v_2 , v_3 linear unabhängig.

Aufgabe 2
Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen M Untervektorräume oder affine Unterräume des gegebenen Vektorraums V sind.

a) $V = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $M = \left\{(a_n) \in V : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty\right\}$.

b) $V = \mathbb{K}^3$, $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in V : x_1 = 2x_2 = -3x_3\}$.

c) $V = C^1[0,1]$, $M = \left\{f \in V : \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + f'(\frac{1}{2}) = 1\right\}$.

d) $V = \mathbb{R}^{[-1,1]}$, $M = \{f \in V : f(0) = 0\}$.

e) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $M = \{f \in V : f \text{ hat mindestens eine Nullstelle}\}$.

f) $V = \mathbb{R}^{[-1,1]}$, $M = \{f \in V : f \text{ ist surjektiv}\}$.

Aufgabe 3
Sei $\emptyset \neq M \subseteq V$ und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass $\operatorname{lin}(M)$ der Durchschnitt aller Untervektorräume von V ist, die M enthalten.

Aufgabe 4

a) Zeigen Sie, dass die durch $f(x) := 2$, $g(x) := x - 1$ und $h(x) := x^2 + 3x$ definierten Funktionen f, g und h aus $C(\mathbb{R})$ linear unabhängig sind.

b) Sei $P_2 := \{p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} : p \text{ ist Polynom vom Grad } \leq 2\}$. Begründen Sie, dass die Menge $\{f, g, h\}$ eine Basis von P_2 ist.

c) Wie lauten die Koordinaten des durch $p(x) = 8x^2 + 2x + 2$, $x \in \mathbb{R}$, gegebenen Polynoms p bezüglich der Basis $\{f, g, h\}$?

Aufgabe 5

a) Seien $V = \mathbb{R}^\mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Weiter seien $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschiedene Zahlen. Zeigen Sie: Die Funktionen $f_1, \ldots, f_n \in V$, $f_i(x) = \mathrm{e}^{\beta_i x}$ für alle $1 \leq i \leq n$ und alle $x \in \mathbb{R}$, sind linear unabhängig.

b) Sind die Funktionen cosh, $\cosh^2 \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ linear unabhängig?

c) Sind die Funktionen 1, $\sinh^2$ und $\cosh^2$ in $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ linear unabhängig?

Aufgabe 6

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Zeilennormalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Für welche α, β sind die Zeilen linear unabhängig? Bestimmen Sie eine Basis der linearen Hülle der Zeilen von A.

b) Bestimmen Sie die Zeilennormalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Sind die Zeilen linear unabhängig? Bestimmen Sie eine Basis der linearen Hülle der Zeilen von A.

c) Geben Sie für folgende Vektorräume jeweils eine Basis an.

(i) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 = x_3\}$,

(ii) $\mathrm{lin}(\{x^2,\, x^2 + x,\, x^2 + 1,\, x^2 + x + 1,\, x^7 + x^5\})$

Probeklausur

Am **28. Januar 2020** von **17:30–19 Uhr** findet eine Probeklausur im **Gerthsen-Hörsaal** (Geb. 30.21) statt. Bitte geben Sie bis zum 26.1.2020 unter

`https://terminplaner4.dfn.de/KUUiertAlOtNz9jK`

bekannt, ob Sie an der Probeklausur teilnehmen werden.

Modulprüfung

Die Klausur *Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik* findet am **20. Februar 2020** von **11–13 Uhr** statt. Die Anmeldung ist ab sofort im Campus Management Portal möglich. Der **Anmeldeschluss** ist am **9. Februar 2020**. Die **Hörsaalverteilung** wird ab 13. Februar 2020 durch Aushang am Brett neben dem Zimmer 2.027 (Geb. 20.30) bekanntgegeben.