Karlsruher Institut für Technologie

31. Januar 2020
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dr. Andreas Geyer-Schulz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschlag zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$.

W F
■ □ Jede Menge M von Vektoren aus V mit $0 \in M$ ist linear abhängig.

Diese Aussage ist wahr. Es gilt $\operatorname{lin}(M) = \operatorname{lin}(M \setminus \{0\})$. Da $0 \in M$, ist somit M linear abhängig.

W F
□ ■ Ist $M := \{v_1, \dots, v_n\}$ linear abhängig, so lässt sich jeder Vektor aus M als Linearkombination der anderen Vektoren aus M darstellen.

Diese Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir die Menge $M = \{0, e_1\}$ als Teilmenge des Vektorraums $\mathbb{R}^2$. Nach dem ersten Teil ist M linear abhängig. Allerdings gibt es kein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $e_1 = \alpha \cdot 0$.

W F
■ □ Existiert ein $v \in V$ mit eindeutiger Darstellung als Linearkombination der $v_1, \dots, v_n$, dann sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig.

Diese Aussage ist wahr. Zum Beweis nehmen wir im Gegenteil an, dass $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig sind. Dann gibt es $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, nicht alle gleich 0, mit $0 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k$. Sei $v \in V$ ein Vektor mit eindeutiger Darstellung als Linearkombination der Vektoren $v_1, \dots, v_n$. Dann erhalten wir durch $v = v + 0$ eine weitere Darstellung von v als Linearkombination, ein Widerspruch. Also muss die Annahme verworfen werden und es folgt die Behauptung.

W F
□ ■ Sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig und $v \in V$, dann sind $v_1 + v, v_2 + v, \dots, v_n + v$ linear unabhängig.

Diese Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir $V = \mathbb{R}^2$ und setzen $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2$ und $v = -e_1$. Dann sind v_1, v_2 linear unabhängig, aber $v_1 + v = 0$ und $v_2 + v = (-1, 1)^\intercal$ sind nach dem ersten Teil linear abhängig.

W F
□ ■ Sind v_1, v_2 linear unabhängig und sind v_1, v_3 linear unabhängig, so sind auch v_2 , v_3 linear unabhängig.

Diese Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir $V = \mathbb{R}^2$ und setzen $v_1 = e_1$ und $v_2 = v_3 = e_2$. Dann sind v_1, v_2 sowie v_1, v_3 linear unabhängig, aber wegen $v_2 - v_3 = 0$, sind v_2, v_3 linear abhängig.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen M Untervektorräume oder affine Unterräume des gegebenen Vektorraums V sind.

a) $V = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $M = \left\{ (a_n) \in V : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \right\}$.

b) $V = \mathbb{K}^3$, $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in V : x_1 = 2x_2 = -3x_3\}$.

c) $V = C^1[0,1]$, $M = \left\{ f \in V : \int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x + f'(\tfrac{1}{2}) = 1 \right\}$.

d) $V = \mathbb{R}^{[-1,1]}$, $M = \{f \in V : f(0) = 0\}$.

e) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $M = \{f \in V : f \text{ hat mindestens eine Nullstelle}\}$.

f) $V = \mathbb{R}^{[-1,1]}$, $M = \{f \in V : f \text{ ist surjektiv}\}$.

Lösungsvorschlag.

a) Die Menge M ist ein Untervektorraum von V, denn die konstante Nullfolge liegt in M und mit (a_n), $(b_n) \in M$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha a_n| = |\alpha| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty,$$

womit $(a_n) + (b_n) \in M$ und $\alpha(a_n) \in M$ gezeigt sind. Aus dem Untervektorraumkriterium folgt die Behauptung.

b) Die Menge M ist ein Untervektorraum von V, denn der Nullvektor $(0,0,0)$ liegt in M und mit $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in M$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$(x_1+y_1) = 2x_2+2y_2 = 2(x_2+y_2) = -3x_3-3y_3 = -3(x_3+y_3), \quad \alpha x_1 = 2\alpha x_2 = -3\alpha x_3,$$

also $(x_1, x_2, x_3)+(y_1, y_2, y_3), \alpha(x_1, x_2, x_3) \in M$. Aus dem Untervektorraumkriterium folgt die Behauptung.

c) Nach Vorlesung ist $C^1[0,1]$ ein Vektorraum. Außerdem ist jede Funktion in $C^1[0,1]$ auf Riemann-integrierbar auf $[0,1]$. Die Menge M ist kein Untervektorraum, da die konstante Nullfunktion nicht in M liegt. Die Menge M ist jedoch ein affiner Unterraum. Wir definieren

$$W = \left\{ f \in C^1[0,1] : \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + f'(\tfrac{1}{2}) = 0 \right\}.$$

Die konstante Einsfunktion 1 liegt in M und es gilt

$$M = \{f + 1 : f \in W\}$$

aufgrund der Linearität des Integrals und der Ableitung. Da die konstante Nullfunktion in W liegt und für $f, g \in W$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ auch $f + g \in W$ sowie $\alpha f \in W$ gilt, ist W ein Untervektorraumvon V.

d) Die Menge M ist ein Untervektorraum. Offensichtlich liegt die Nullfunktion in M. Für $f, g \in M$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt $\alpha f(0) = 0$ und $f(0)+g(0) = 0$, d.h., es gilt sowohl $\alpha f \in M$ als auch $f + g \in M$. Die Behauptung folgt aus dem Untervektorraumkriterium.

e) Die Menge M ist weder ein Untervektorraum noch ein affiner Unterraum von V, denn die konstante Nullfunktion liegt in M, genau wie die beiden Funktionen $x \mapsto x^2$ und $x \mapsto (x+1)^2$, aber $x \mapsto x^2 + (x+1)^2 = 2x^2 + 2x + 1$ hat keine reelle Nullstelle.

f) Die Menge M ist kein Untervektorraum von V, da die Nullfunktion nicht surjektiv ist und somit nicht in M liegt. Die Menge M ist auch kein affiner Unterraum. Zum Beweis nehmen wir im Gegenteil an, dass M ein affiner Unterraum wäre. Wir wählen $g \in M$ beliebig und definieren

$$U = \{f - g : f \in M\}.$$

Dann ist, wegen der Annahme, dass M affin ist, U ein Untervektorraum von V. Wir setzen $f = \frac{1}{2}g + 1$. Aus der Surjektivität von g folgt die Surjektivität von f und somit $f \in M$. Es gilt also $f - g \in U$. Es gilt aber auch $2(f - g) = 2 - g \in U$, da die konstante Funktion 2 nicht surjektiv ist. Damit ist U kein Untervektorraum und obige Annahme ist widerlegt. □

Aufgabe 3
Sei $\emptyset \neq M \subseteq V$ und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass $\operatorname{lin}(M)$ der Durchschnitt aller Untervektorräume von V ist, die M enthalten.

Lösungsvorschlag. Wir definieren

$$W = \bigcap_{M \subseteq U, U \text{ UVR von } V} U.$$

Wir wollen nun $\operatorname{lin}(M) = W$ zeigen.

Nach Satz 14.4 ist $\operatorname{lin}(M)$ ein Untervektorraum und es ist klar, dass $M \subseteq \operatorname{lin}(M)$ gilt. Daraus folgt $W \subseteq \operatorname{lin}(M)$, da die Menge $\operatorname{lin}(M)$ im obigen Schnitt vorkommt.

Sei umgekehrt $x \in \operatorname{lin}(M)$. Sei nun U ein Untervektorraum von V, der M enthält. Da sich als Linearkombination von Elementen in M schreiben lässt, da M in U enthalten ist und da U ein Vektorraum ist, gilt $x \in U$. Da U ein beliebiger Untervektorraum von V ist, der M enthält, folgt $x \in W$ und damit die Behauptung. □

Aufgabe 4

a) Zeigen Sie, dass die durch $f(x) := 2$, $g(x) := x - 1$ und $h(x) := x^2 + 3x$ definierten Funktionen f, g und h aus $C(\mathbb{R})$ linear unabhängig sind.

b) Sei $P_2 := \{p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} : p \text{ ist Polynom vom Grad } \leq 2\}$. Begründen Sie, dass die Menge $\{f, g, h\}$ eine Basis von P_2 ist.

c) Wie lauten die Koordinaten des durch $p(x) = 8x^2 + 2x + 2$, $x \in \mathbb{R}$, gegebenen Polynoms p bezüglich der Basis $\{f, g, h\}$?

Lösungsvorschlag. Für $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir $p_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $p_k(x) = x^k$.

a) Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$. Dann gilt

$$\gamma x^2 + (\beta + \gamma)x + 2\alpha - \beta = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Da die Funktionen p_0, p_1, p_2 in $C(\mathbb{R})$ linear unabhängig sind, folgt daraus $\gamma = 0$, $\beta + 3\gamma = 0$ und $2\alpha - \beta = 0$, also $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Damit ist die lineare Unahängigkeit von f, g, h gezeigt.

b) Es gilt $P_2 = \operatorname{lin}\{p_0, p_1, p_2\}$ und somit $\dim P_2 = 3$. Da die drei Vektoren f, g, h nach Teil a) linear unabhängig sind, bilden sie ebenfalls eine Basis.

c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$p(x) = 8x^2 + 2x + 2 = 8(x^2 + 3x) - 22(x - 1) - 20 = 8h(x) - 22g(x) - 10f(x).$$

Also ist $p = -10f - 22g + 8h$ und die Koordinaten von p bezüglich der Basis $\{f, g, h\}$ lauten $(-10, -22, 8)$. $\square$

Aufgabe 5

a) Seien $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ und $n \in \mathbb{N}$. Weiter seien $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschiedene Zahlen. Zeigen Sie: Die Funktionen $f_1, \ldots, f_n \in V$, $f_i(x) = \mathrm{e}^{\beta_i x}$ für alle $1 \leq i \leq n$ und alle $x \in \mathbb{R}$, sind linear unabhängig.

b) Sind die Funktionen cosh, $\cosh^2 \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ linear unabhängig?

c) Sind die Funktionen 1, $\sinh^2$ und $\cosh^2$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ linear unabhängig?

Lösungsvorschlag.

a) Wir zeigen die Aussage mittels Induktion über n.

Sei $n = 1$. Sei $\lambda_1 \mathrm{e}^{\beta_1 x} = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Aus $\mathrm{e}^{\beta_1 x} > 0$, folgt $\lambda_1 = 0$.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass die Aussage für $n-1$ beliebige Zahlen $\tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_{n-1}$, die paarweise verschieden sind, bereits gezeigt ist. Seien $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \mathrm{e}^{\beta_1 x} + \ldots + \lambda_n \mathrm{e}^{\beta_n x} = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $\mathrm{e}^{-\beta_n x}$ und erhalten

$$\lambda_1 \mathrm{e}^{(\beta_1 - \beta_n)x} + \ldots + \lambda_{n-1} \mathrm{e}^{(\beta_{n-1} - \beta_n)x} + \lambda_n = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Wir differenzieren die letzte Gleichung und erhalten

$$\lambda_1(\beta_1 - \beta_n)\mathrm{e}^{(\beta_1 - \beta_n)x} + \ldots + \lambda_{n-1}(\beta_{n-1} - \beta_n)\mathrm{e}^{(\beta_{n-1} - \beta_n)x} = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Da $\beta_1 - \beta_n, \ldots, \beta_{n-1} - \beta_n$ auch paarweise verschieden sind, folgt aus der Induktionsvoraussetzung

$$\lambda_1(\beta_1 - \beta_n) = \ldots = \lambda_{n-1}(\beta_{n-1} - \beta_n) = 0.$$

Da $\beta_i \neq \beta_n$ für $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, folgt $(\beta_i - \beta_n) \neq 0$ für $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ und damit

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0.$$

Aus $(*)$ folgt $\lambda_n \mathrm{e}^{\beta_n x} = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und somit $\lambda_n = 0$. Also sind $f_1, \ldots, f_n$ linear unabhängig.

b) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha \cosh(x) + \beta \cosh^2(x) = 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Setzen wir $x = 0$ in diese Gleichung ein, ergibt sich $\alpha = -\beta$. Leiten wir die Gleichung zwei Mal ab, ergibt sich

$$\alpha \sinh(x) + 2\beta \cosh(x) \sinh(x) = 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

und

$$\alpha \cosh(x) + 2\beta \cosh^2(x) + 2\beta \sinh^2(x) = 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Setzen wir $x = 0$ in diese Gleichung ein, ergibt sich $\alpha = -2\beta$. Somit folgt $\beta = 2\beta$, also $\beta = 0$ und somit $\alpha = 0$.

c) Die drei Funktionen 1, $\sinh^2$ und $\cosh^2$ sind nicht linear unabhängig, denn wegen $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$1 + \sinh^2 - \cosh^2 = 0,$$

sodass sich die drei Funktionen nicht-trivial zu 0 linear kombinieren lassen. □

Aufgabe 6

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Zeilennormalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Für welche α, β sind die Zeilen linear unabhängig? Bestimmen Sie eine Basis der linearen Hülle der Zeilen von A.

b) Bestimmen Sie die Zeilennormalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Sind die Zeilen linear unabhängig? Bestimmen Sie eine Basis der linearen Hülle der Zeilen von A.

c) Geben Sie für folgende Vektorräume jeweils eine Basis an.

(i) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 = x_3\}$,

(ii) $\mathrm{lin}(\{x^2,\, x^2 + x,\, x^2 + 1,\, x^2 + x + 1,\, x^7 + x^5\})$

Lösungsvorschlag.

a) Wir führen folgende Zeilenumformungen durch:

$$B=\begin{pmatrix}1&-4&3&-2&0\\1&-2&1&4&2\\2&0&2&4&4\\1&0&-1&\alpha&\beta\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-4&3&-2&0\\0&2&-2&6&2\\0&8&-4&8&4\\1&0&-1&\alpha&\beta\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&10&4\\0&2&-2&6&2\\0&0&4&-16&-4\\1&0&-1&\alpha&\beta\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&6&3\\0&2&0&-2&0\\0&0&4&-16&-4\\1&0&-1&\alpha&\beta\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \mid\cdot\frac{1}{2}\\ \mid\cdot\frac{1}{4}\\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&6&3\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&-4&-1\\1&0&-1&\alpha&\beta\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&6&3\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&-4&-1\\0&0&0&\alpha-10&\beta-4\end{pmatrix}.$$

Die letzte Matrix ist für alle $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ in Zeilenstufenform. Ablesen liefert den Zeilenrang $r=4$, für $\alpha\neq 10$ oder $\beta\neq 4$. Ansonsten ist $r=3$. Nach der Vorlesung ($r=n$), sind die Zeilen von A damit linear unabhängig genau dann, wenn $\alpha\neq 10$ oder $\beta\neq 4$ gilt. Sind $\alpha=10$ und $\beta=4$, so ist die letzte Matrix bereits die Zeilennormalform von B und die Basis ist gegeben durch die drei ersten Zeilen der Matrix. In allen anderen Fällen ist eine Basis durch alle vier Zeilen der Ausgangsmatrix gegeben. Ist $\alpha=10$ aber $\beta\neq 4$, so ist

$$B\sim\begin{pmatrix}1&0&0&6&3\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&-4&-1\\0&0&0&0&\beta-4\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \mid\cdot\frac{1}{\beta-4}\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&6&0\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&-4&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

die Zeilennormalform von B. Ist $\alpha\neq 10$, so sei $\kappa=\frac{\beta-4}{\alpha-10}$ und es gilt

$$B\sim\begin{pmatrix}1&0&0&6&3\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&-4&-1\\0&0&0&\alpha-10&\beta-4\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \mid\cdot\frac{1}{\alpha-10}\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&6&3\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&-4&-1\\0&0&0&1&\kappa\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&3-6\kappa\\0&1&0&0&\kappa\\0&0&1&0&-1+4\kappa\\0&0&0&1&\kappa\end{pmatrix}$$

die Zeilennormalform von B.

b) Wir führen folgende Zeilenumformungen durch:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow + \\ \cdot 2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & 6 & 9 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ \leftarrow + \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot -\frac{1}{2} \\ \mid \cdot -\frac{1}{2} \\ \mid \cdot -\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \cdot 2 \quad \cdot \frac{7}{2} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die letzte Matrix ist in Zeilennormalform. Ablesen liefert den Zeilenrang $r = 3$. Nach der Vorlesung $(r = n)$, sind die Zeilen von A damit linear unabhängig und bilden damit eine Basis ihrer linearen Hülle.

c) (i) Eine Basis ist gegeben durch $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, denn aus $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$ folgt $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1) = (0, 0, 0,)$, also $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Wenn ferner $v \in \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 = x_3\}$ gilt, so gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $v = (a, b, a)$, also $v = av_1 + bv_2$.

(ii) Wir zeigen zunächst, dass $\{x^2, x^2 + x, x^2 + 1, x^7 + x^5\}$ linear unabhängig ist: Es gelte

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2(x^2 + x) + \lambda_3(x^2 + 1) + \lambda_4(x^7 + x^5) = 0,$$

also

$$\lambda_3 + \lambda_2 x + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)x^2 + \lambda_4 x^5 + \lambda_4 x^7 = 0.$$

Da die Polynome $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\} \subset P$ linear unabhängig sind, folgt

$$\lambda_3 = 0, \ \lambda_2 = 0, \ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \ \lambda_4 = 0,$$

also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Damit ist $\{x^2, \, x^2 + x, \, x^2 + 1, \, x^7 + x^5\}$ linear unabhängig. Schließlich lässt sich das Polynom $x^2 + x + 1$ als Linearkombination aus den restlichen Polynomen darstellen, und zwar gilt

$$-x^2 + (x^2 + x) + (x^2 + 1) = x^2 + x + 1.$$

Damit ist $\mathrm{lin}(\{x^2, x^2 + x, x^2 + 1, x^2 + x + 1, x^7 + x^5\})$ ein 4-dimensionaler Vektorraum und

$$\{x^2, x^2 + x, x^2 + 1, x^7 + x^5\}$$

ist eine Basis dieses Vektorraums.
Alternative. Offensichtlich ist dann auch $\{1, x, x^2, x^7 + x^5\}$ eine Basis (die Vektoren sind linear unabhängig und jeder Vektor lässt sich als Linearkombination der Vektoren der ersten Basis schreiben). $\square$