Karlsruher Institut für Technologie

30. Januar 2020
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dr. Andreas Geyer-Schulz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

14. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Wahr oder falsch?)
Seien $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{K}^n$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

a) W □ F □ $\operatorname{Kern} A = \{0\} \implies Ax = b$ hat genau eine Lösung.

b) W □ F □ $\operatorname{Bild} A = \mathbb{K}^n \implies Ax = b$ hat genau eine Lösung.

c) W □ F □ $A \neq 0 \implies \forall\, n \in \mathbb{N} : A^n \neq 0.$

d) W □ F □ $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$

Aufgabe 2
Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha - 1 & \beta + 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, in Abhängigkeit von den Parametern α und β, ob die Gleichung $Ax = b$ lösbar ist. Berechnen Sie gegebenenfalls alle Lösungen.

Aufgabe 3
Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie $\operatorname{rg}(A)$, $\operatorname{rg}(A|b)$ und $\operatorname{rg}(A|c)$.

b) Bestimmen Sie $\dim(\operatorname{Kern} A)$ und geben Sie die Lösungsmenge der Gleichung $Ax = 0$ an.

c) Geben Sie die Lösungsmenge der Gleichungen $Ax = b$ und $Ax = c$ an.

Aufgabe 4
Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung $Ax = b$.

Aufgabe 5

a) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} k x_k$ eine Abbildung.

(i) Zeigen Sie, dass ϕ linear ist.

(ii) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern} \phi$ und eine Basis von $\operatorname{Bild} \phi$.

(iii) Für welche n ist ϕ injektiv?

b) Gegeben sei die Abbildung $\phi\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_1 + x_2)$.
Ist ϕ linear? Bestimmen Sie $\operatorname{Kern} \phi$ und $\operatorname{Bild} \phi$.

c) Sei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3}.$$

Berechnen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern} A$ und von $\operatorname{Bild} A$.

Aufgabe 6

Sei $n \in \mathbb{N}$. Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sei die transponierte Matrix $A^\intercal$ definiert durch $A^\intercal = (a_{ji}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Die Abbildung $P\colon \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}^{n\times n}$ sei definiert durch

$$P(A) = \frac{1}{2}(A + A^\intercal).$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Die Abbildung P ist linear.

b) Es gilt $\operatorname{Kern} P = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} : A^\intercal = -A\}$ (die Menge der schief-symmetrischen Matrizen).

c) Es gilt $\operatorname{Bild} P = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} : A^\intercal = A\}$ (die Menge der symmetrischen Matrizen).

d) Es gilt $\dim(\operatorname{Bild} P) = \frac{n(n+1)}{2}$, $\dim(\operatorname{Kern} P) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Modulprüfung

Die Klausur *Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik* findet am **20. Februar 2020** von **11–13 Uhr** statt. Die Anmeldung ist ab sofort im Campus Management Portal möglich. Der **Anmeldeschluss** ist am **9. Februar 2020**. Die **Hörsaalverteilung** wird ab 13. Februar 2020 durch Aushang am Brett neben dem Zimmer 2.027 (Geb. 20.30) bekanntgegeben.