7. Februar 2020
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dr. Andreas Geyer-Schulz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschlag zum 14. Übungsblatt

Aufgabe 1

Seien $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $b \in \mathbb{K}^n$.

W ■ F □ Kern $A = \{0\} \implies Ax = b$ hat genau eine Lösung.

Diese Aussage ist wahr. Wenn Kern $A = \{0\}$, dann gilt $\dim(\operatorname{Kern} A) = 0$ und somit mit der Dimensionsformel $\dim \operatorname{Bild} A = \operatorname{rg} A = n$. Damit ist die Gleichung $Ax = b$ für jedes $b \in \mathbb{K}^n$ eindeutig lösbar.

W ■ F □ Bild $A = \mathbb{K}^n \implies Ax = b$ hat genau eine Lösung.

Diese Aussage ist wahr. Aus $\dim \operatorname{Bild} A = n$ folgt $\dim \operatorname{Kern} A = 0$ und wir sind in der gleichen Situation wie im ersten Teil.

W □ F ■ $A \neq 0 \implies \forall n \in \mathbb{N} : A^n \neq 0$.

Sei $m \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}.$$

Dann gilt $A^n \neq 0$ für alle $n \in \{0, \ldots, m-1\}$ aber $A^n = 0$ für alle $n \in \{m, m+1, \ldots\}$.

W □ F ■ $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Wir setzen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = A^2 + 2AB + B^2.$$

Aufgabe 2

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha - 1 & \beta + 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, in Abhängigkeit von den Parametern α und β, ob die Gleichung $Ax = b$ lösbar ist. Berechnen Sie gegebenenfalls alle Lösungen.

Lösungsvorschlag. Wir formen die Matrix so weit zu einer Zeilenstufenform um, wie die Allgemeinheit von α und β es zulässt.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha-1 & \beta+2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & \beta & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \beta-\alpha^2 & 2-\alpha \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \beta-\alpha^2 & 2-\alpha \end{array}\right)$$

Nun folgt eine Fallunterscheidung.

1. Fall: $\beta \neq \alpha^2$. Sei $\gamma := \frac{2-\alpha}{\beta-\alpha^2}$. Wir dividieren die dritte Zeile durch $\beta-\alpha^2$ und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2-(2+\alpha)\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 1-\alpha\gamma \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem ist also eindeutig Lösbar, die Lösung lautet

$$x = \begin{pmatrix} 2-(2+\alpha)\gamma \\ 1-\alpha\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\frac{4-\alpha^2}{\beta-\alpha^2} \\ 1-\frac{\alpha(2-\alpha)}{\beta-\alpha^2} \\ \frac{2-\alpha}{\beta-\alpha^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta-\alpha^2}\begin{pmatrix} 2\beta-\alpha^2-4 \\ \beta-2\alpha \\ 2-\alpha \end{pmatrix} .$$

2. Fall: $\beta = \alpha^2$, $\alpha \neq 2$. Das Gleichungssystem hat die Form

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\alpha \end{array}\right)$$

und ist wegen $2-\alpha \neq 0$ nicht lösbar, da die erweiterte Matrix mit 3 einen höheren Rang hat als die Matrix selbst.

3. Fall: $\beta = \alpha^2$, $\alpha = 2$ (also $\beta = 4$). Die Matrix hat die Form

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und ist in Zeilennormalform. Ausgeschrieben lauten die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_3 &= 2, \\ x_2 + 2x_3 &= 1, \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} x_1 &= 2-4x_3, \\ x_2 &= 1-2x_3, \\ x_3 &= x_3. \end{aligned}$$

x_3 ist also ein frei wählbarer Paramter und der Lösungsraum der gegebenen Gleichung lautet

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{K} \right\}.$$

Alternativ kann man in Matrixform den so genannten (-1)-Trick anwenden. Ist die Matrix in Zeilennormalform, ergänze man die gesamte Matrix so durch Nullzeilen, dass die nicht erweiterte Matrix quadratisch ist und die Nicht-Nullzeilen ihre vorhandene erste Eins auf der Diagonale dieser Matrix haben (dies ist hier bereits der Fall, links steht eine 3×3-Matrix mit ihren Einsen auf der Diagonalen. Nun ersetzt man die Nullen auf der Diagonale durch (-1)en. Die spezielle Lösung des Gleichungssystems ist über die Spalte ganz rechts abzulesen, der Lösungsraum der homogenen Gleichung (mit Parameter davor) ist durch die Spalten der Matrix links gegeben, die zu einer eingefügten (-1) gehören.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & (-1) & 0 \end{array}\right) \sim \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{K} \right\}$$

Hinweis: Der Vektor $(4, 2, -1)$ hat hierbei ein anderes Vorzeichen als bei der oberen Methode, durch die freie Wahl von $s \in \mathbb{K}$ handelt es sich jedoch um die Gleiche Lösungsmenge. $\square$

Aufgabe 3
Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie $\operatorname{rg}(A)$, $\operatorname{rg}(A|b)$ und $\operatorname{rg}(A|c)$.

b) Bestimmen Sie $\dim(\operatorname{Kern} A)$ und geben Sie die Lösungsmenge der Gleichung $Ax = 0$ an.

c) Geben Sie die Lösungsmenge der Gleichungen $Ax = b$ und $Ax = c$ an.

Lösungsvorschlag.

a) Wir bringen die erweiterte Matrix $(A|b|c)$ auf Zeilennormalform. Wir schreiben beide Vektoren b und c in die Erweiterung, da die Zeilennormalform nur von der Matrix A abhängt und die Operationen somit bei beiden erweiterten Matrizen dieselben sind.

$$
\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{cccccc|c|c}
5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & -2 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 3 & 0 \\
3 & 3 & 4 & 1 & 2 & 2 & 4 & 3
\end{array}\right) \\
\sim &\left(\begin{array}{cccccc|c|c}
-1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 3 & 0 \\
5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & -2 & 1 \\
3 & 3 & 4 & 1 & 2 & 2 & 4 & 3
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\cdot 5 \quad \cdot 3 \quad | \cdot (-1) \\
+ \\
+
\end{array} \\
\sim &\left(\begin{array}{cccccc|c|c}
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -3 & 0 \\
0 & 6 & 7 & -2 & -1 & 5 & 13 & 1 \\
0 & 6 & 7 & -2 & -1 & 5 & 13 & 3
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\
\cdot(-1) \quad | \cdot \frac{1}{6} \\
+
\end{array} \\
\sim &\left(\begin{array}{cccccc|c|c}
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -3 & 0 \\
0 & 1 & \frac{7}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{6} & \frac{1}{6} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
+ \\
\\
\\
\end{array} \\
\sim &\left(\begin{array}{cccccc|c|c}
1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\
0 & 1 & \frac{7}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{6} & \frac{1}{6} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{array}\right)
\end{aligned}
$$

Wir erkennen somit, dass $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b) = 2$, $\operatorname{rg}(A|c) = 3$.

b) Nach Satz 14.10 ist $\dim(\operatorname{Bild} A) = \operatorname{rg}(A) = 2$ und nach der Dimensionsformel in 14.11 demensprechend (die Matrix besitzt 6 Spalten)

$$\dim(\operatorname{Kern} A) = 6 - \dim(\operatorname{Bild} A) = 6 - 2 = 4.$$

Schreiben wir $Ax = 0$ in der obigen Zeilennormalform zu einem Gleichungssystem um, ergibt sich

$$
\begin{aligned}
x_1 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{2}{3}x_4 + \frac{5}{6}x_5 - \frac{1}{6}x_6 &= 0, \\
x_2 + \frac{7}{6}x_3 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{6}x_5 + \frac{5}{6}x_6 &= 0,
\end{aligned}
$$

also

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{1}{6}x_3 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{5}{6}x_5 + \frac{1}{6}x_6, \\
x_2 &= -\frac{7}{6}x_3 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{6}x_5 - \frac{5}{6}x_6. \\
x_3 &= x_3, \\
x_4 &= x_4, \\
x_5 &= x_5, \\
x_6 &= x_6.
\end{aligned}
$$

Somit ergibt sich als Lösungsmenge der Gleichung $Ax = 0$, indem wir x_3 bis x_6 durch beliebige Parameter ersetzen,

$$\left\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{6}s - \frac{2}{3}t - \frac{5}{6}u + \frac{1}{6}v \\ -\frac{7}{6}s + \frac{1}{3}t + \frac{1}{6}u - \frac{5}{6}v \\ s \\ t \\ u \\ v \end{pmatrix} : s,t,u,v \in \mathbb{K}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} -s - 4t - 5u + 1v \\ -7s + 2t + u - 5v \\ 6s \\ 6t \\ 6u \\ 6v \end{pmatrix} : s,t,u,v \in \mathbb{K}\right\},$$

wobei wir für die zweite Menge jeden Parameter durch sein Sechsfaches ersetzt haben. Analog erhält man das Resultat über den (-1)-Trick (die einzelnen Vektoren mit ihren Parametern wurden hier zu einem Vektor zusammengefasst).

c) Das Gleichungssystem $Ax = c$ ist unlösbar, da $\operatorname{rg}(A|c) = 3 \neq 2 = \operatorname{rg}(A)$. Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist lösbar und die allgemeine Lösung ist gegeben als Summe einer speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung. Mit dem gleichen Vorgehen wie in Teil b) gilt nämlich

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{5}{6} - \frac{1}{6}x_3 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{5}{6}x_5 + \frac{1}{6}x_6, \\ x_2 &= \frac{13}{6} - \frac{7}{6}x_3 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{6}x_5 - \frac{5}{6}x_6. \\ x_3 &= x_3, \\ x_4 &= x_4, \\ x_5 &= x_5, \\ x_6 &= x_6, \end{aligned}$$

und somit ist die Lösungsmenge

$$\left\{\begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{13}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}s - \frac{2}{3}t - \frac{5}{6}u + \frac{1}{6}v \\ -\frac{7}{6}s + \frac{1}{3}t + \frac{1}{6}u - \frac{5}{6}v \\ s \\ t \\ u \\ v \end{pmatrix} : s,t,u,v \in \mathbb{K}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{13}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -s - 4t - 5u + 1v \\ -7s + 2t + u - 5v \\ 6s \\ 6t \\ 6u \\ 6v \end{pmatrix} : s,t,u,v \in \mathbb{K}\right\}. \qquad \square$$

Aufgabe 4
Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung $Ax = b$.

Lösungsvorschlag. Wir formen die erweiterte Matrix in Zeilennormalform um und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & -14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit dem (-1)-Trick betrachten wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -10 & -9 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

woraus wir das Ergebnis ablesen können. Damit ist die Lösungsmenge gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{K} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -9 + s + 10t \\ -s \\ -7 + 7t \\ t \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{K} \right\}. \qquad \square$$

Aufgabe 5

a) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\phi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} k x_k$ eine Abbildung.

 (i) Zeigen Sie, dass ϕ linear ist.

 (ii) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern} \phi$ und eine Basis von $\operatorname{Bild} \phi$.

 (iii) Für welche n ist ϕ injektiv?

b) Gegeben sei die Abbildung $\phi \colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_1 + x_2)$.
Ist ϕ linear? Bestimmen Sie $\operatorname{Kern} \phi$ und $\operatorname{Bild} \phi$.

c) Sei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3}.$$

Berechnen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern} A$ und von $\operatorname{Bild} A$.

Lösungsvorschlag.

a) (i) Aufgrund von

$$\phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

ist $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linear.

Alternativ kann man die Linearität von ϕ auch wie folgt begründen:

Für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\phi(\alpha x + y) = \sum_{k=1}^{n} k(\alpha x_k + y_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} k x_k + \sum_{k=1}^{n} k y_k = \alpha\phi(x) + \phi(y).$$

(ii) Wegen $\phi(\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}) = 1 \cdot a = a$ für jedes $a \in \mathbb{K}$ gilt $\operatorname{Bild}\phi = \mathbb{R}$, also ist $\{1\}$ eine Basis von $\operatorname{Bild} A = \operatorname{Bild}\phi$. Insbesondere ist $\dim(\operatorname{Bild} A) = 1$.

Nun überlegen wir uns, wie viele Basisvektoren $\operatorname{Kern}\phi = \operatorname{Kern} A$ aufspannen. Die Dimensionsformel liefert $n = \dim(\operatorname{Bild} A) + \dim(\operatorname{Kern} A)$, folglich ist $\dim(\operatorname{Kern} A) = n - 1$. Wir bestimmen $\operatorname{Kern}\phi = \operatorname{Kern} A$. Jeder der $n-1$ Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

ist in $\operatorname{Kern}\phi$ enthalten. Diese Vektoren (bzw. die Negativen davon) erhalten wir durch Einsetzen von Parametern für $x_2, \ldots, x_n$ in der Gleichung

$$x_1 + 2x_2 + \cdots + (n-1)x_{n-1} + nx_n = 0$$

oder über den (-1)-Trick. Da die angegebenen $n-1$ Vektoren linear unabhängig sind, bilden diese eine Basis von $\operatorname{Kern}\phi$:

$$\operatorname{Kern}\phi = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(iii) Wegen ϕ injektiv $\iff$ $\operatorname{Kern}\phi = \{0\}$ $\iff$ $\dim \operatorname{Kern}\phi = 0$, ist ϕ genau für $n = 1$ injektiv.

b) Wegen $\phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ ist ϕ linear. Die Zeilennormalform von A ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Kern von ϕ ist der Kern von A und somit die Lösungsmenge von $Ax = 0$. In Zeilennormalform ergibt dies die Forderung

$$x_1 + x_2 = 0,$$

somit als Lösungsmenge $\operatorname{Kern}\phi = \operatorname{Kern} A = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{K} \right\}$. Das Bild von ϕ ist die Menge $\{\phi(x) : x \in \mathbb{K}^2\}$, die aufgespannt wird durch die Bilder der Einheitsvektoren e_1, e_2, was gerade die Spalten von A sind. Somit gilt

$$\operatorname{Bild}\phi = \operatorname{Bild} A = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{K} \right\}.$$

c) Zunächst bringen wir A mittels Zeilenumformungen auf Zeilennormalform:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot\frac{1}{3} \quad \cdot(-\frac{2}{3}) \mid \cdot(-\frac{1}{3}) \\ + \\ \quad + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus erkennen wir mit dem üblichen Vorgehen, dass

$$\operatorname{Kern} A = \left\{ x \in \mathbb{K}^3 : Ax = 0 \right\} = \left\{ s \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{K} \right\} = \left\{ s \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{K} \right\}.$$

Folglich ist $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $\operatorname{Kern} A$ und es gilt $\dim(\operatorname{Kern} A) = 1$. Die Dimensionsformel liefert $\dim(\operatorname{Bild} A) = 3 - \dim(\operatorname{Kern} A) = 3 - 1 = 2$. Da die beiden Vektoren $Ae_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, Ae_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Bild} A$ linear unabhängig sind, bilden diese eine Basis von $\operatorname{Bild} A$, also

$$\operatorname{Bild} A = \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \qquad \square$$

Aufgabe 6
Sei $n \in \mathbb{N}$. Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sei die transponierte Matrix $A^\intercal$ definiert durch $A^\intercal = (a_{ji}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Die Abbildung $P\colon \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}^{n\times n}$ sei definiert durch

$$P(A) = \frac{1}{2}(A + A^\intercal).$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Die Abbildung P ist linear.

b) Es gilt $\operatorname{Kern} P = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} : A^\intercal = -A\}$ (die Menge der schief-symmetrischen Matrizen).

c) Es gilt $\operatorname{Bild} P = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} : A^\intercal = A\}$ (die Menge der symmetrischen Matrizen).

d) Es gilt $\dim(\operatorname{Bild} P) = \frac{n(n+1)}{2}$, $\dim(\operatorname{Kern} P) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Lösungsvorschlag.

a) Es gilt $(\alpha A)^\intercal = \alpha A^\intercal$ sowie $(A+B)^\intercal = A^\intercal + B^\intercal$ für $\alpha \in \mathbb{K}$ und $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, wie man direkt anhand der Definition erkennt. Damit folgt

$$P(\alpha A) = \frac{1}{2}(\alpha A + (\alpha A)^\intercal) = \frac{1}{2}(\alpha A + \alpha A^\intercal) = \alpha \cdot \frac{1}{2}(A + A^\intercal) = \alpha P(A),$$

sowie

$$\begin{aligned} P(A+B) &= \frac{1}{2}((A+B) + (A+B)^\intercal) = \frac{1}{2}(A + B + A^\intercal + B^\intercal) \\ &= \frac{1}{2}(A + A^\intercal) + \frac{1}{2}(B + B^\intercal) = P(A) + P(B). \end{aligned}$$

Also ist P eine lineare Abbildung.

b) Es gilt $A \in \operatorname{Kern} P \iff A + A^\intercal = 0 \iff A^\intercal = -A$.

c) (i) Sei $B \in \mathbb{K}^{n\times n} \Rightarrow P(B)^\intercal = \frac{1}{2}(B + B^\intercal)^\intercal = \frac{1}{2}(B^\intercal + B) = P(B)$, da $(B^\intercal)^\intercal = B$ anhand der Definition. Also gilt $\operatorname{Bild} P \subseteq \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} : A = A^\intercal\}$.

(ii) Sei $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $C^\intercal = C$. Dann gilt $\frac{1}{2}(C + C^\intercal) = \frac{1}{2}(2C) = C$, also $P(C) = C$. Es folgt $\{A \in \mathbb{K}^{n\times n} : A = A^\intercal\} \subseteq \operatorname{Bild} P$.

Insgesamt folgt aus (i) und (ii): $\operatorname{Bild} P = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} : A = A^\intercal\}$.

d) Eine Basis von Bild(P) wird durch die folgenden Matrizen gebildet:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & \\ 1 & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \dots$$

(Einsen auf der Diagonale bzw. in gegenüberliegenden Einträgen abseits der Diagonalen). Diese Matrizen sind offenbar linear unabhängig, außerdem läßt sich jede symmetrische Matrix als Linearkombination dieser Matrizen schreiben. Also bilden obige Matrizen eine Basis. Da man in der rechten oberen Dreiecksmatrix stets ein Element $= 1$ wählen kann und den Rest $= 0$, besteht diese Basis aus

$$n + (n-1) + \ldots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

Elementen, also $\dim(\operatorname{Bild} P) = \frac{n(n+1)}{2}$. Ferner erhalten wir

$$\dim(\operatorname{Kern} P) = \dim(\mathbb{K}^{n\times n}) - \dim(\operatorname{Bild} P) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}. \qquad \square$$