Karlsruher Institut für Technologie

6. Februar 2020
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dr. Andreas Geyer-Schulz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

15. Übungsblatt

Hinweis. Am 7. Februar 2020 findet die Übung im Daimler-Hörsaal (Geb. 10.21) statt.

Aufgabe 1

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Überprüfen Sie, ob A regulär ist und berechnen Sie in diesem Fall A^{-1}.

Aufgabe 2

a) Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass durch die Abbildung $(\cdot|\cdot) : \mathbb{K}^{n\times m} \times \mathbb{K}^{n\times m} \to \mathbb{K}$ gegeben durch

$$(A|B) \mapsto \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{jk}\overline{b_{jk}} \quad \text{für } A = (a_{jk}) \in K^{n\times m},\ B = (b_{jk}) \in K^{n\times m},$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^{n\times m}$ definiert wird. Man nennt $(\cdot|\cdot)$ Frobenius-Skalarprodukt.

b) Sei nun $m = n$. Die zum Frobenius-Skalarprodukt gehörende Norm (die sogenannte Frobeniusnorm) wird durch

$$\|A\| = (A|A)^{1/2}$$

definiert. Zeigen Sie, dass $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt.

c) Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $\|A\| < 1$. Zeigen Sie, dass $I - A$ regulär ist und

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

gilt. Dabei sei die *Konvergenz* der Reihe analog wie in $\mathbb{R}$ definiert: Man sagt, dass $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ den Grenzwert $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ hat, wenn

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,N_0 \in \mathbb{N}\ \forall N \geq n_0 \colon \left\| \sum_{k=0}^{N} A^k - C \right\| < \varepsilon$$

gilt.

d) Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, A sei regulär und es gelte $\|B - A\| < \|A^{-1}\|^{-1}$. Zeigen Sie, dass B regulär ist.

e) Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $\|A^{k_0}\| < 1$ für ein $k_0 \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $I - A$ regulär ist.

f) Zeigen Sie, dass es keine Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gibt, die die Gleichung $AB - BA = I$ erfüllen.
Hinweis. Widerspruch: zeigen Sie $AB^{k+1} - B^{k+1}A = (k+1)B^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$. Für jedes $x = (x_1, \ldots, x_n)^\intercal \in \mathbb{K}^n$ definieren wir

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \quad \text{und} \quad \|x\|_\infty = \max_{k \in \{1,\ldots,n\}} |x_k| \,.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildungen $\|\cdot\|_1 : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$, $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ die Eigenschaften (N1), (N2) und (N3) einer Norm erfüllen und dass es kein Skalarprodukt in $\mathbb{K}^n$ gibt, welches diese Normen induziert. Skizzieren Sie außerdem die Mengen

$$\left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_1 \leq 1\right\} \quad \text{und} \quad \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty \leq 1\right\}.$$

Modulprüfung

Die Klausur *Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik* findet am **20. Februar 2020** von **11–13 Uhr** statt. Die Anmeldung ist ab sofort im Campus Management Portal möglich. Der **Anmeldeschluss** ist am **9. Februar 2020**. Die **Hörsaalverteilung** wird ab 13. Februar 2020 durch Aushang am Brett neben dem Zimmer 2.027 (Geb. 20.30) bekanntgegeben.