Karlsruher Institut für Technologie

7. Februar 2020
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dr. Andreas Geyer-Schulz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschlag zum 15. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Überprüfen Sie, ob A regulär ist und berechnen Sie in diesem Fall A^{-1}.

Lösungsvorschlag. Die Matrizen A ist regulär. Ihre Inverse ergibt sich durch

$$\left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 5 & -5 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 14 & 15 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 12 & 15 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Deshalb gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 12 & 15 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Aufgabe 2

a) Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass durch die Abbildung $(\cdot|\cdot) : \mathbb{K}^{n\times m} \times \mathbb{K}^{n\times m} \to \mathbb{K}$ gegeben durch

$$(A|B) \mapsto \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{jk}\overline{b_{jk}} \quad \text{für } A = (a_{jk}) \in K^{n\times m},\ B = (b_{jk}) \in K^{n\times m},$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^{n\times m}$ definiert wird. Man nennt $(\cdot|\cdot)$ Frobenius-Skalarprodukt.

b) Sei nun $m = n$. Die zum Frobenius-Skalarprodukt gehörende Norm (die sogenannte Frobeniusnorm) wird durch
$$\|A\| = (A|A)^{1/2}$$
definiert. Zeigen Sie, dass $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$ für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt.

c) Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $\|A\| < 1$. Zeigen Sie, dass $I - A$ regulär ist und
$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$
gilt. Dabei sei die *Konvergenz* der Reihe analog wie in $\mathbb{R}$ definiert: Man sagt, dass $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ den Grenzwert $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ hat, wenn
$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, N_0 \in \mathbb{N} \ \forall N \geq n_0 \colon \left\| \sum_{k=0}^{N} A^k - C \right\| < \varepsilon$$
gilt.

d) Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, A sei regulär und es gelte $\|B - A\| < \|A^{-1}\|^{-1}$. Zeigen Sie, dass B regulär ist.

e) Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $\|A^{k_0}\| < 1$ für ein $k_0 \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $I - A$ regulär ist.

f) Zeigen Sie, dass es keine Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gibt, die die Gleichung $AB - BA = I$ erfüllen.
Hinweis. Widerspruch: zeigen Sie $AB^{k+1} - B^{k+1}A = (k+1)B^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Lösungsvorschlag.

a) Seien $A = (a_{jk}), B = (b_{jk}), C = (c_{jk}) \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Es gilt
$$(A|B) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{jk}\overline{b_{jk}} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \overline{b_{jk}\overline{a_{jk}}} = \overline{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_{jk}\overline{a_{jk}}} = \overline{(B|A)}.$$
Zudem gilt
$$(\alpha A + B|C) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} (\alpha a_{jk} + b_{jk})\overline{c_{jk}} = \alpha \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{jk}\overline{c_{jk}} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_{jk}\overline{c_{jk}} = \alpha\,(A|C) + (B|C)\,.$$
Schließlich gilt
$$(A|A) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{jk}\overline{a_{jk}} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} |a_{jk}|^2 \geq 0$$
und der Ausdruck ist genau dann 0, wenn alle $a_{jk} = 0$ sind, also A die Nullmatrix ist. Somit ist gezeigt, dass $(\cdot|\cdot)$ ein Skalarprodukt definiert.

b) Wir betrachten $A = (a_{jk})$ und $B = (b_{jk})$. Es gilt für das Matrixprodukt

$$(AB)_{jk} = \sum_{l=1}^{n} a_{jl} b_{lk}, \quad \text{für } j, k \in \{1, \dots n\}.$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung in $\mathbb{K}^n$ angewandt auf die Vektoren $(a_{jl})_{l=1}^n$ und $(b_{lk})_{l=1}^n$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \|AB\|^2 &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \sum_{l=1}^{n} a_{jl} b_{lk} \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} |a_{jl}|^2 \right) \left(\sum_{l=1}^{n} |b_{lk}|^2 \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} |a_{jl}|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} |b_{lk}|^2 \right) \\ &= \|A\|^2 \|B\|^2 . \end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen folgt die Behauptung.

c) Sei $N \in \mathbb{N}$. Wie bei der geometrischen Reihe erhalten wir durch eine Teleskopsumme die Identität

$$(I - A) \sum_{k=0}^{N} A^k = I - A^{N+1} = \sum_{k=0}^{N} A^k (I - A).$$

Da $\|A\| < 1$ vorausgesetzt ist, folgt aus Teil b), dass $\left\|A^k\right\| \leq \|A\|^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Somit konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k$. Analog wie in $\mathbb{R}$ ist damit die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ absolut konvergent und man kann genauso wie in $\mathbb{R}$ zeigen, dass der Grenzwert $C \coloneqq \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} A^k$ existiert. Wir erhalten

$$\left\| (I - A) \sum_{k=0}^{N} A^k - I \right\| = \left\| A^{N+1} \right\| \leq \|A\|^{N+1} \to 0$$

für $N \to \infty$. Damit folgt $(I - A)C = I$ und analog $C(I - A) = I$. Daher ist $I - A$ invertierbar und es gilt $(I - A)^{-1} = C$.

d) Es gilt

$$B = B - A + A = A\big(A^{-1}(B - A) + I\big) = A\big(I - A^{-1}(A - B)\big).$$

Da nach Teil b) und der Voraussetzung

$$\|A^{-1}(A - B)\| \leq \|A^{-1}\| \, \|B - A\| < \|A^{-1}\| \|A^{-1}\|^{-1} = 1$$

gilt, folgt aus Teil c), dass B invertierbar ist und

$$B^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (A^{-1}(A - B))^k A^{-1}$$

gilt.

e) Nach Teil c) und der Voraussetzung ist $I - A^{k_0}$ invertierbar. Es gilt

$$\sum_{k=0}^{k_0-1} A^k(I-A) = (I-A)\sum_{k=0}^{k_0-1} A^k = I - A^{k_0}$$

und somit

$$(I-A^{k_0})^{-1}\sum_{k=0}^{k_0-1} A^k(I-A) = (I-A)\sum_{k=0}^{k_0-1} A^k(I-A^{k_0})^{-1} = (I-A)(I-A^{k_0})^{-1}\sum_{k=0}^{k_0-1} A^k = I.$$

Also ist $I - A$ invertierbar und die Inverse ist durch

$$(I-A)^{-1} = (I-A^{k_0})^{-1}\sum_{k=0}^{k_0-1} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} A^{kk_0}\sum_{k=0}^{k_0-1} A^k$$

gegeben.

f) Angenommen, es gelte $AB - BA = I$. Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass $AB^k - B^kA = kB^{k-1}$ gilt. Daraus folgt

$$AB^{k+1} - B^{k+1}A = (AB^k - B^kA)B + B^k(AB - BA) = kB^k + B^k = (k+1)B^k.$$

Aus dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass

$$AB^{k+1} - B^{k+1}A = (k+1)B^k$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Mit Teil b) erhalten wir

$$(k+1)\|B^k\| = \|(k+1)B^k\| = \|AB^{k+1} - B^{k+1}A\| \leq 2\,\|A\|\,\|B\|\,\|B^k\|$$

und somit $(k+1) \leq 2\,\|A\|\,\|B\|$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Diese Abschätzung ist absurd und somit muss die Annahme $AB - BA = I$ verworfen werden. $\square$

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$. Für jedes $x = (x_1, \ldots, x_n)^\intercal \in \mathbb{K}^n$ definieren wir

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \quad \text{und} \quad \|x\|_\infty = \max_{k\in\{1,\ldots,n\}} |x_k|\,.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildungen $\|\cdot\|_1 : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$, $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ die Eigenschaften (N1), (N2) und (N3) einer Norm erfüllen und dass es kein Skalarprodukt in $\mathbb{K}^n$ gibt, welches diese Normen induziert. Skizzieren Sie außerdem die Mengen

$$\left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_1 \leq 1\right\} \quad \text{und} \quad \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty \leq 1\right\}.$$

Lösungsvorschlag. Seien $x, y \in \mathbb{K}^n$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Es gelten

$$\|x\|_1 = 0 \iff \sum_{k=1}^{n} |x_k| = 0 \iff |x_k| = 0 \text{ für } k \in \{1, \ldots, n\} \iff x = 0,$$

und

$$\|x\|_\infty = 0 \iff \max_{k\in\{1,\dots,n\}} |x_k| = 0 \iff |x_k| = 0 \text{ für } k \in \{1,\dots,n\} \iff x = 0.$$

Außerdem gelten

$$\|\alpha x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\alpha x_k| = |\alpha| \sum_{k=1}^{n} |x_k| = |\alpha|\, \|x\|_1$$

und

$$\|\alpha x\|_\infty = \max_{k\in\{1,\dots,n\}} |\alpha x_k| = |\alpha| \max_{k\in\{1,\dots,n\}} |x_k| = |\alpha|\, \|x\|_\infty\,.$$

Schließlich gelten auch

$$\|x+y\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k| \le \sum_{k=1}^{n} |x_k| + |y_k| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

und

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_\infty &= \max_{k\in\{1,\dots,n\}} |x_k + y_k| \\
&\le \max_{k\in\{1,\dots,n\}} (|x_k| + |y_k|) \\
&\le \max_{k\in\{1,\dots,n\}} |x_k| + \max_{k\in\{1,\dots,n\}} |y_k| \\
&= \|x\|_1 + \|y\|_\infty\,.
\end{aligned}$$

Damit erfüllen die Abbildungen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ die Eigenschaften einer Norm. $\square$