Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

WS2020/21
03.11.2020

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

(a) (i) Bezeichne $G(d)$ die Aussagenform „der Deutsche d ist groß“ und $B(d)$ die Aussagenform „der Deutsche d trinkt Bier“. Dann lässt sich die Aussage der Aufgabenstellung durch

$$\forall d : G(d) \wedge B(d)$$

formal ausdrücken. Entsprechend ist ihre Verneinung durch

$$\neg\left(\forall d : G(d) \wedge B(d)\right) \Leftrightarrow \exists d : \neg\left(G(d) \wedge B(d)\right) \Leftrightarrow \exists d : \neg G(d) \vee \neg B(d)$$

gegeben. In Worten also: „Es gibt (mindestens) einen Deutschen, der nicht groß ist oder kein Bier trinkt.“

(ii) Bezeichne $P(t, d)$ die Aussagenform „der Deckel d passt auf den Topf t. Dann lässt sich die Aussage der Aufgabenstellung durch

$$\forall t : \exists d : P(t, d)$$

formal ausdrücken. Entsprechend ist ihre Verneinung durch

$$\neg(\forall t : \exists d : P(t, d)) \Leftrightarrow \exists t : \neg(\exists d : P(t, d)) \Leftrightarrow \exists t : \forall d : \neg P(t, d)$$

gegen. In Worten also: „Es gibt einen Topf auf den kein Deckel passt.“

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\neg A \vee (B \wedge A) &\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee A) \\
&\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge \text{wahr} \\
&\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \\
&\Leftrightarrow (A \Rightarrow B).
\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 2:

(a) (i) Bezeichne $B(t)$ die Aussagenform „zum Zeitpunkt t läuft Batman im Kino“, J die Aussagenform „zum Zeitpunkt t läuft James Bond im Kino“ und $I(t)$ die Aussagenform „ich gehe zum Zeitpunkt t ins Kino“. Dann lässt sich die Aussage der Aufgabenstellung durch

$$\forall t : B(t) \vee J(t) \Rightarrow I(t)$$

formal ausdrücken. Entsprechend ist ihre Verneinung durch

$$\neg(\forall t : (B(t) \vee J(t)) \Rightarrow I(t)) \Leftrightarrow \exists t : \neg((B(t) \vee J(t)) \Rightarrow I(t)) \Leftrightarrow \exists t : \neg I(t) \wedge (B(t) \vee J(t))$$

gegeben. In Worten also: „Manchmal gehe ich nicht ins Kino, obwohl Batman oder James Bond gezeigt werden.“

(ii) Zuerst werden die formalen Symbole v für Bundesligaverein, s für Spiel sowie die Funktionen $T(v, s)$ für die Anzahl der Tore, die der Verein v im Spiel s geschossen hat und $A(v, s)$ für die Anzahl der ausgewechselten Spieler des Vereins v im Spiel s eingeführt. Dann lässt sich die Aussage der Aufgabenstellung durch

$$\exists v : \forall s : T(v, s) \leq 3 \wedge A(v, s) \geq 1$$

formal ausdrücken. Entsprechend ist ihre Verneinung durch

$$\begin{aligned}
\neg\left(\exists v : \forall s : T(v, s) \leq 3 \wedge A(v, s) \geq 1\right) &\Leftrightarrow \forall v : \neg\left(\forall s : T(v, s) \leq 3 \wedge A(v, s) \geq 1\right) \\
&\Leftrightarrow \forall v : \exists s : \neg\left(T(v, s) \leq 3 \wedge A(v, s) \geq 1\right) \\
&\Leftrightarrow \forall v : \exists s : \neg\left(T(v, s) \leq 3\right) \vee \neg\left(A(v, s) \geq 1\right) \\
&\Leftrightarrow \forall v : \exists s : T(v, s) > 3 \vee A(v, s) < 1 \\
&\Leftrightarrow \forall v : \exists s : T(v, s) > 3 \vee A(v, s) = 0,
\end{aligned}$$

gegeben. In Worten also: „Jeder Bundesligaverein hat in mindestens einem Spiel mehr als drei Tore geschossen oder hat keinen Spieler ausgewechselt.“

(b) Wir setzen die Umformulierung der Implikation aus der Vorlesung in die zu zeigende Aussage ein und erhalten

$$\begin{aligned}
[((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)] &\Leftrightarrow [\neg((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \vee (A \Rightarrow C)] \\
&\Leftrightarrow [\neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)) \vee (\neg A \vee C)] \\
&\Leftrightarrow [\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee C) \vee \neg A \vee C] \\
&\Leftrightarrow [(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg C) \vee \neg A \vee C] \\
&\Leftrightarrow [(\neg A \vee (A \wedge \neg B)) \vee (C \vee (B \wedge \neg C))] \\
&\Leftrightarrow [((\neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \vee ((C \vee B) \wedge (C \vee \neg C))] \\
&\Leftrightarrow [(\text{wahr} \wedge (\neg A \vee \neg B)) \vee ((C \vee B) \wedge \text{wahr})] \\
&\Leftrightarrow [\neg A \vee \neg B \vee C \vee B] \\
&\Leftrightarrow [\neg A \vee C \vee (\neg B \vee B)] \\
&\Leftrightarrow [\neg A \vee C \vee \text{wahr}] \\
&\Leftrightarrow \text{wahr}
\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 3:
Wir führen einen Zirkelschluss:

- $(i) \Rightarrow (ii)$: Laut Vorlesung ist immer $M_1 \cap M_2 \subseteq M_1$. Also ist nur $M_1 \subseteq M_1 \cap M_2$ zu zeigen. Sei dazu $x \in M_1$ beliebig. Nach (i) ist auch $x \in M_2$. Also ist $x \in M_1 \cap M_2$.

- $(ii) \Rightarrow (iii)$: Laut Vorlesung ist immer $M_2 \subseteq M_1 \cup M_2$. Also ist nur $M_1 \cup M_2 \subseteq M_2$ zu zeigen. Sei dazu $x \in M_1 \cup M_2$ beliebig. Also ist bereits $x \in M_2$ oder $x \in M_1$. Nach (ii) ist $M_1 = M_1 \cap M_2$, also ist auch im zweiten Fall $x \in M_2$.

- $(iii) \Rightarrow (i)$: Laut Vorlesung ist immer $M_1 \subseteq M_1 \cup M_2$. Nach (iii) ist $M_1 \cup M_2 = M_2$ und somit in der Tat $M_1 \subseteq M_2$.

$\square$

Aufgabe 4:
Sei $x \in M_1 \cap M_3$. Insbesondere $x \in M_1$. Wegen $M_1 \subseteq M_1 \cup M_3 \subseteq M_2$ folgt $x \in M_2$. Also $x \in M_1 \cap M_2 \subseteq M_3^c$, d.h. $x \notin M_3$. Insbesondere $x \notin M_1 \cap M_3$. Dies ist ein Widerspruch. Also kann die Menge $M_1 \cap M_3$ keine Elemente enthalten — sie ist die leere Menge.
$\square$

Aufgabe 5:

(i) Für jedes $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(M_1 \cap M_2) &\Leftrightarrow f(x) \in M_1 \cap M_2 \\ &\Leftrightarrow f(x) \in M_1 \wedge f(x) \in M_2 \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(M_1) \wedge x \in f^{-1}(M_2) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(M_1) \cap f^{-1}(M_2) \end{aligned}$$

und somit in der Tat $f^{-1}(M_1 \cap M_2) = f^{-1}(M_1) \cap f^{-1}(M_2)$.

(ii) Für jedes $y \in Y$ gilt

$$\begin{aligned} y \in f(M_3 \cap M_4) &\Leftrightarrow \exists x \in M_3 \cap M_4 : f(x) = y \\ &\Rightarrow \exists x_1 \in M_3 : f(x_1) = y \wedge \exists x_2 \in M_4 : f(x_2) = y \\ &\Leftrightarrow y \in f(M_3) \wedge y \in f(M_4) \\ &\Leftrightarrow y \in f(M_3) \cap f(M_4) \end{aligned}$$

und somit in der Tat $f(M_3 \cap M_4) \subseteq f(M_3) \cap f(M_4)$.

Für das geforderte Gegenbeispiel betrachte man $X := Y := \mathbb{R}$, $x \overset{f}{\mapsto} x^2$, $M_3 := \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ und $M_4 := \mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$. Es gilt $M_3 \cap M_4 = \emptyset$, also $f(M_3 \cap M_4) = \emptyset$. Aber $f(M_3) = f(M_4) = \mathbb{R}^+$ und folglich $f(M_3) \cap f(M_4) = \mathbb{R}^+ \neq \emptyset$.

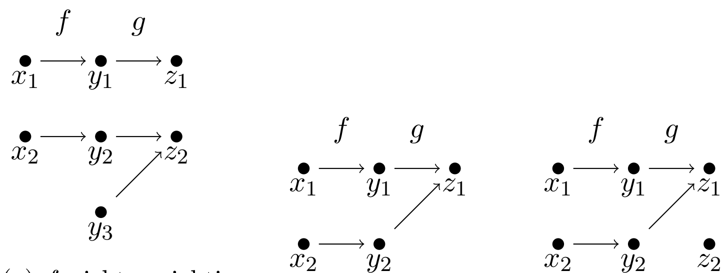
(iii) Für jedes $y \in Y$ gilt

$$\begin{aligned} y \in f(M_3 \cup M_4) &\Leftrightarrow \exists x \in M_3 \cup M_4 : f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \exists x_1 \in M_3 : f(x_1) = y \vee \exists x_2 \in M_4 : f(x_2) = y \\ &\Leftrightarrow y \in f(M_3) \vee y \in f(M_4) \\ &\Leftrightarrow y \in f(M_3) \cup f(M_4) \end{aligned}$$

und somit in der Tat $f(M_3 \cup M_4) = f(M_3) \cup f(M_4)$.

□

Aufgabe 6:



(a) f nicht surjektiv g nicht injektiv (b) f injektiv (c) f surjektiv

Abbildung 1: Gegenbeispiele

(i) Die Aussage ist wahr, denn: Seien $x, y \in X$ beliebig. Zu zeigen ist $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \Rightarrow x = y$. Es gilt in der Tat

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \quad &\Leftrightarrow \quad g(f(x)) = g(f(y)) \\ &\overset{g \text{ injektiv}}{\Rightarrow} \quad f(x) = f(y) \\ &\overset{f \text{ injektiv}}{\Rightarrow} \quad x = y. \end{aligned}$$

(ii) Die Aussage ist falsch. Siehe Abbildung 1a: g ist nicht injektiv, denn $g(y_2) = g(y_3) = z_2$.

(iii) Die Aussage ist wahr, denn: Sei $z \in Z$ beliebig. Zu zeigen ist $\exists x \in X : (g \circ f)(x) = z$. Da g surjektiv ist, existiert ein $y \in Y$ mit $g(y) = z$. Da f surjektiv ist, existiert ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Für dieses x gilt in der Tat $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$.

(iv) Die Aussage ist falsch. Siehe Abbildung 1a: f ist nicht surjektiv, denn $y_3 \notin f(X)$.

(v) Die Aussage ist wahr, denn: Sei $z \in Z$ beliebig. Zu zeigen ist $\exists y \in Y : g(y) = z$. Da $(g \circ f)$ surjektiv ist, existiert ein $x \in X$ mit $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = z$. Mit der Wahl $y = f(x) \in Y$ gilt tatsächlich $g(y) = z$.

(vi) Die Aussage ist wahr, denn: Nach (i) ist $(g \circ f)$ injektiv. Nach (iii) ist $(g \circ f)$ surjektiv. Also ist $(g \circ f)$ bijektiv.

(vii) Die Aussage ist wahr, denn: Sei $y \in Y$ beliebig. Zu zeigen ist $\exists x \in X : f(x) = y$. Betrachte dazu $g(y) \in Z$. Da $(g \circ f)$ surjektiv ist, existiert ein $x \in X$ mit $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y)$. Da g injektiv ist, muss aber $f(x) = y$ gelten.

(viii) Die Aussage ist falsch: Siehe Abbildung 1b: f ist injektiv.

(ix) Die Aussage ist falsch: Siehe Abbildung 1c: f ist surjektiv.

$\square$

Quelle des Übungsblattes: Link auf Ilias Seite