

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

2. Übungsblatt

Aufgabe 7:

Bestimmen Sie für die folgenden Mengen jeweils das Infimum, Minimum, Supremum und Maximum, sofern sie existieren.

(a) $A = \{x^2 - x + 2 \mid x \in \mathbb{R}\},$

(b) $B = \left\{n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$

Aufgabe 8: [Inf, Sup, Min, Max T]

Bestimmen Sie für die folgenden Mengen jeweils das Infimum, Minimum, Supremum und Maximum, sofern sie existieren.

(a) $A = \left\{x + \frac{1}{x} \mid 0 < x \leq 42\right\},$

(b) $B = \left\{\frac{x^2}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{R}\right\}.$

Aufgabe 9:

Bestimmen Sie jeweils die Menge M aller $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen gelten.

(a) $|2x - 10| \leq x,$

(b) $|x - 2| |x + 2| = 2,$

(c) $|x + 2| > |x - 3|,$

(d) $|2 - |2 - x|| = 2.$

Aufgabe 10: [Ungleichungen **T**]

Bestimmen Sie jeweils die Menge M aller $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen gelten.

(a) $|4 - 3x| > 2x + 10$,

(b) $|x^2 - 4| \leq x + 2$,

(c) $|x - 4| = |x + 1|$.

(d) $||x + 1| - 2| \leq x$,

Aufgabe 11: [Vollständige Induktion **T**]

Zeigen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion. Achten Sie darauf, wie Sie die Annahme im Induktionsschritt formulieren. (Siehe Zusammenfassung der Vorlesung Kapitel 4.8)

(a) $2^n > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Bernoulli Ungleichung: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ für $x \geq -1$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 12:

Zeigen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion.

(a) $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n + 1)! - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

(b) $\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie die erste Aussage auch ohne Verwendung der vollständigen Induktion.

Aufgabe 13:

Zeigen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion.

(a) $\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

(b) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie die letzte Aussage auch ohne Verwendung der vollständigen Induktion.

Hinweis: Es gilt $\sum_{k=1}^n k^3 - \sum_{k=1}^n (k-1)^3 = n^3$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 7, 9, 12 und 13 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.