

## Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

### Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

#### Aufgabe 7:

(a) Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt (quadratische Ergänzung)

$$x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}. \quad (1)$$

Also ist  $A$  nach unten durch  $\frac{7}{4}$  beschränkt. Einsetzen von  $x = \frac{1}{2}$  in (1) zeigt  $\frac{7}{4} \in A$ . Also ist  $\min(A) = \inf(A) = \frac{7}{4}$ .

Wir zeigen, dass  $\sup(A)$  und  $\max(A)$  nicht existieren, da  $A$  nicht nach oben beschränkt ist. Sei dazu  $\gamma \in \mathbb{R}$  beliebig. Setze  $x := \max\{\gamma, 2\}$ . Dann gilt

$$A \ni a := x^2 - x + 2 > x^2 - x = \underbrace{x(x-1)}_{\geq 1} \geq x \geq \gamma.$$

Also kann tatsächlich kein  $\gamma \in \mathbb{R}$  eine obere Schranke von  $A$  sein.

(b) Für jedes  $N \in \mathbb{N}$  gilt (quadratische Ergänzung)

$$n + \frac{1}{n} = \left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + 2 \geq 2. \quad (2)$$

Also ist  $B$  nach unten durch 2 beschränkt. Einsetzen von  $n = 1$  in (2) zeigt  $2 \in B$ . Also ist  $\min(B) = \inf(B) = 2$ .

Wir zeigen, dass  $\sup(B)$  und  $\max(B)$  nicht existieren, da  $B$  nicht nach oben beschränkt ist. Sei dazu  $\gamma \in \mathbb{R}$  beliebig. Nach dem Satz aus Abschnitt 4.7 des Skriptes, gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > \gamma$ . Dann gilt

$$B \ni b := n + \frac{1}{n} > n > \gamma.$$

Also kann tatsächlich kein  $\gamma \in \mathbb{R}$  eine obere Schranke von  $B$  sein.

□

#### Aufgabe 8:

(a) Für jedes  $0 < x \leq 42$  gilt (quadratische Ergänzung)

$$x + \frac{1}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2 \geq 2. \quad (3)$$

Also ist  $A$  nach unten durch 2 beschränkt. Einsetzen von  $0 < x = 1 \leq 42$  in (3) zeigt  $2 \in A$ . Also ist  $\min(A) = \inf(A) = 2$ .

Wir zeigen, dass  $\sup(A)$  und  $\max(A)$  nicht existieren, da  $A$  nicht nach oben beschränkt ist. Sei dazu  $\gamma \in \mathbb{R}$  beliebig. Setze  $x := \frac{1}{|\gamma|+1}$ . Es ist  $0 < x \leq 1$  und demnach gilt

$$A \ni a := x + \frac{1}{x} > \frac{1}{x} = 1 + |\gamma| > |\gamma| \geq \gamma.$$

Also kann tatsächlich kein  $\gamma \in \mathbb{R}$  eine obere Schranke von  $A$  sein.

(b) Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$0 \leq \frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{>0} < 1. \quad (4)$$

Also ist  $B$  nach unten durch 0 und nach oben durch 1 beschränkt. Einsetzen von  $x = 0$  in (4) zeigt  $0 \in B$ . Also ist  $\min(B) = \inf(B) = 0$ .

Wir wollen  $\sup(B) = 1$  zeigen und verwenden dafür Satz 4.6 (3) des Skriptes. Sei also  $\varepsilon > 0$  beliebig. Setze  $x := \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} + 1$ . Es gilt tatsächlich

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{1+x^2} > 1 - \varepsilon \\ \Leftrightarrow & x^2 > (1 - \varepsilon)(1 + x^2) = (1 - \varepsilon) + x^2(1 - \varepsilon) \\ \Leftrightarrow & x^2(1 - (1 - \varepsilon)) > (1 - \varepsilon) \\ \Leftrightarrow & x^2 = \left( \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} + 1 \right)^2 > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \\ \Leftrightarrow & \text{wahr.} \end{aligned}$$

Also ist  $\sup(B) = 1$ . Da nach (4)  $1 \notin B$ , existiert  $\max(B)$  nicht.

□

### Aufgabe 9:

(a) Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Es gilt:  $|2x - 10| = 2|x - 5|$ . Betrachte die Fallunterscheidung:

- $x \geq 5$ : Es gilt dann  $|x - 5| = x - 5$  und damit

$$|2x - 10| = 2|x - 5| = 2(x - 5) \leq x \Leftrightarrow x \leq 10.$$

- $x < 5$ : Es gilt dann  $|x - 5| = 5 - x$  und damit

$$|2x - 10| = 2|x - 5| = 2(5 - x) \leq x \Leftrightarrow \frac{10}{3} \leq x.$$

Insgesamt ist also das Intervall  $M = [\frac{10}{3}, 5) \cup [5, 10] = [\frac{10}{3}, 10]$  die Lösungsmenge.

(b) Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Es gilt  $|x - 2| \cdot |x + 2| = |x^2 - 4|$  und damit  $|x - 2| \cdot |x + 2| = 2 \Leftrightarrow x^2 - 4 \in \{-2, 2\}$ . Ferner gilt

$$x^2 - 4 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 6 \Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\},$$

sowie

$$x^2 - 4 = -2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}.$$

Damit ist die Lösungsmenge  $M = \{-\sqrt{6}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{6}\}$ .

(c) Da Beträge nicht-negativ sind, gilt

$$\begin{aligned} |x+2| > |x-3| &\Leftrightarrow (x+2)^2 > (x-3)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 > x^2 - 6x + 9 \\ &\Leftrightarrow 10x > 5 \\ &\Leftrightarrow x > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist  $M = (\frac{1}{2}, \infty)$  die Lösungsmenge.

(d) Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Definiere  $y := |2-x|$ . Es gilt

$$|2 - |2-x|| = |2-y| = 2 \Leftrightarrow 2-y \in \{-2, 2\},$$

also  $y = 0$  oder  $y = 4$ . Ist  $y = |2-x| = 0$ , so ist  $x = 2$ . Ist  $y = |2-x| = 4$ , so ist  $2-x \in \{4, -4\}$ , also  $x \in \{-2, 6\}$ . Damit lautet die Lösungsmenge  $M = \{-2, 2, 6\}$ .

□

### Aufgabe 10:

(a) Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Es gilt  $|4-3x| = 3|\frac{4}{3}-x|$ . Betrachte die Fallunterscheidung:

- $x \geq \frac{4}{3}$ : Es gilt dann  $|\frac{4}{3}-x| = x - \frac{4}{3}$  und damit

$$|4-3x| = 3\left|\frac{4}{3}-x\right| > 2x+10 \Leftrightarrow 3\left(x - \frac{4}{3}\right) > 2x+10 \Leftrightarrow x > 14.$$

- $x < \frac{4}{3}$ : Es gilt dann  $|\frac{4}{3}-x| = \frac{4}{3}-x$  und damit

$$|4-3x| = 3\left|\frac{4}{3}-x\right| > 2x+10 \Leftrightarrow 3\left(\frac{4}{3}-x\right) > 2x+10 \Leftrightarrow -\frac{6}{5} > x.$$

Da  $\frac{4}{3} < 14$  und  $-\frac{6}{5} < \frac{4}{3}$ , ist die Lösungsmenge  $M = (-\infty, -\frac{6}{5}) \cup (14, \infty)$ .

(b) Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Es gilt

$$|x^2-4| \leq x+2 \Rightarrow x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2.$$

Ferner ist offenbar  $-2 \in M$ . Sei also im Weiteren  $x > -2$ . Dann gilt

$$|x^2-4| = |x-2||x+2| = |x-2|(x+2) \leq x+2 \Leftrightarrow |x-2| \leq 1,$$

also  $x \in [1, 3]$ . Damit ist die Lösungsmenge  $M = \{-2\} \cup [1, 3]$ .

(c) Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Da Beträge nicht-negativ sind, gilt

$$\begin{aligned} |x - 4| = |x + 1| &\Leftrightarrow (x - 4)^2 = (x + 1)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = x^2 + 2x + 1 \\ &\Leftrightarrow 15 = 10x \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Also ist die Lösungsmenge  $M = \{\frac{3}{2}\}$ .

(d) Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Es gilt

$$||x + 1| - 2| \leq x \Rightarrow x \leq 0.$$

Sei also im Weiteren  $x \geq 0$ . Dann gilt

$$|x + 1| - 2 = |x + 1 - 2| = |x - 1| \leq x = |x|.$$

Da Beträge nicht-negativ sind, gilt

$$|x - 1| \leq |x| \Leftrightarrow (x - 1)^2 \leq x^2 \Leftrightarrow 1 \leq 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x.$$

Wegen  $0 < \frac{1}{2}$ , ist die Lösungsmenge  $M = [\frac{1}{2}, \infty)$ .

□

### Aufgabe 11: [ Vollständige Induktion $\mathbf{T}$ ]

(a) • *Induktionsanfang (IA):*

Für  $n = 1$  gilt  $2^1 > 1$ .

• *Induktionsschluss (IS):*

Wir nehmen an, dass die *Induktionsvoraussetzung (IV)*

$$2^n > n$$

für ein beliebiges aber festes  $n \in \mathbb{N}$  gelte. Wir zeigen die Aussage jetzt für  $n + 1$ . Es ist

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n > n + 1$$

wobei die erste Ungleichung nach (IV) gilt und die zweite ungleichung leicht zu überprüfen ist. Es ist  $2n > n + 1 \Leftrightarrow 2 > 1 + \frac{1}{n} \Leftrightarrow n > 1$ . Da wir den fall  $n = 1$  bereits überprüft haben können wir  $n > 1$  annehmen.

(b) • *Induktionsanfang (IA):*

Für  $n = 1$  ist  $(1 + x)^0 = 1 \geq 1 + 0 \cdot x$ .

• *Induktionsschluss (IS):*

Wir nehmen an, dass die *Induktionsvoraussetzung (IV)*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad \text{für } x \geq -1$$

für ein beliebiges aber festes  $n \in \mathbb{N}$  gelte. Wir zeigen die Aussage jetzt für  $n + 1$ . Es ist,

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + nx) = 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x$$

wobei die erste Ungleichung nach (IV) (und da  $(1 + x) > 0$ ) gilt und die zweite ungleichung trivial ist.

## Aufgabe 12:

- (a) • *Induktionsanfang (IA):*  
Für  $n = 1$  gilt  $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = 1 = (n + 1)! - 1$ .

- *Induktionsschluss (IS):*  
Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig. Für dieses  $n$  gelte die *Induktionsvoraussetzung (IV)*

$$\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n + 1)! - 1.$$

Dann gilt für  $n + 1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! &= (n + 1) \cdot (n + 1)! + \sum_{k=1}^n k \cdot k! \\ &\stackrel{(IV)}{=} (n + 1) \cdot (n + 1)! + (n + 1)! - 1 \\ &= (n + 1)! \cdot (n + 2) - 1 = (n + 2)! - 1. \end{aligned}$$

Die Aussage lässt sich wie folgt direkt zeigen. Es gilt für jedes  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k \cdot k! &= \sum_{k=1}^n (k + 1 - 1) \cdot k! = \sum_{k=1}^n [(k + 1)k! - k!] = \sum_{k=1}^n (k + 1)! - \sum_{k=1}^n k! \\ &\stackrel{\text{Indexshift}}{=} \sum_{k=2}^{n+2} k! - \sum_{k=1}^n k! \stackrel{\text{Teleskopsumme}}{=} (n + 1)! - 1. \end{aligned}$$

- (b) • *Induktionsanfang (IA):*  
Für  $n = 1$  gilt  $\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^2 = 1 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}$ .

- *Induktionsschluss (IS):*  
Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig. Für dieses  $n$  gelte die *Induktionsvoraussetzung (IV)*

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dann gilt für  $n + 1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} k^2 &= (-1)^{n+2} (n + 1)^2 + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^2 \\ &\stackrel{(IV)}{=} (-1)^{n+2} (n + 1)^2 + (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} \\ &= (-1)^{n+2} (n + 1) \cdot \left( (n + 1) - \frac{n}{2} \right) \\ &= (-1)^{n+2} (n + 1) \frac{n + 2}{2}. \end{aligned}$$

□

### Aufgabe 13:

- (a) • *Induktionsanfang (IA):*

Für  $n = 1$  gilt  $\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = 1 = \frac{n^n}{n!}$ .

- *Induktionsschluss (IS):*

Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig. Für dieses  $n$  gelte die *Induktionsvoraussetzung (IV)*

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!}.$$

Dann gilt für  $n + 1$

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{(n+1)-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \stackrel{(IV)}{=} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{n^n}{n!} \\ &= \frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)^n}{n!} \cdot \frac{n+1}{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

- (b) • *Induktionsanfang (IA):*

Für  $n = 1$  gilt  $\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

- *Induktionsschluss (IS):*

Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig. Für dieses  $n$  gelte die *Induktionsvoraussetzung (IV)*

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Dann gilt für  $n + 1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= (n+1)^2 + \sum_{k=1}^n k^2 \stackrel{(IV)}{=} (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= (n+1) \cdot \frac{6(n+1) + n(2n+1)}{6} = (n+1) \cdot \frac{6n+6+2n^2+n}{6} \\ &= (n+1) \cdot \frac{2n^2+7n+6}{6} = (n+1) \cdot \frac{(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

Die Aussage lässt sich wie folgt direkt zeigen. Nach dem Hinweis gilt (Teleskopsumme)

$$\begin{aligned} n^3 &= \sum_{k=1}^n k^3 - \sum_{k=1}^n (k-1)^3 = \sum_{k=1}^n k^3 - \sum_{k=1}^n (k^3 - 3k^2 + 3k - 1) \\ &= \sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1) = 3 \sum_{k=1}^n k^2 - 3 \sum_{k=1}^n k + n \end{aligned}$$

Nach Beispiel (2) des Abschnittes 4.8 des Skriptes gilt

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Einsetzen und Auflösen nach  $\sum_{k=1}^n k^2$  liefert die gesuchte Formel

$$\begin{aligned} n^3 &= 3 \sum_{k=1}^n k^2 - \frac{3n(n+1)}{2} + n \Leftrightarrow n(n+1)(n-1) + \frac{3n(n+1)}{2} = 3 \sum_{k=1}^n k^2 \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

□