Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

WS2020/21
17.11.2020

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

3. Übungsblatt

Aufgabe 13: [Binomialkoeffizienten **T**]

(a) Seien $k, l \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie

$$\sum_{n=0}^{l} \binom{k+n}{k} = \binom{k+l+1}{k+1}.$$

(b) Seien $z \in \mathbb{C}$, $m, n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ mit $a_k = 0$ für $k \in \{m+1, \ldots, m+n\}$ bzw. $b_l = 0$ für $l \in \{n+1, \ldots, m+n\}$. Zeigen Sie

$$\left(\sum_{k=0}^{m} a_k z^k\right)\left(\sum_{l=0}^{n} b_l z^l\right) = \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l\right) z^k.$$

Aufgabe 14:
Seien $l, m, n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie

$$\binom{m+n}{l} = \sum_{k=0}^{l} \binom{m}{k}\binom{n}{l-k}.$$

Hinweise: Betrachten Sie das Polynom $p(z) := (1+z)^{m+n}$ und verwenden Sie Aufgabe 13 (b). Hier ist $\binom{n}{k} := 0$, falls $k < 0$ oder $k > n$.

Aufgabe 15: [Komplexe Zahlen 1 **T**]
Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Zahlenebene

(i) $A = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z+1+\mathrm{i}| = |z-3-3\mathrm{i}|\}$,

(ii) $B = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z^2) > 1\}$.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 16:
Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Zahlenebene

(i) $A = \{z \in \mathbb{C} | \, |z - \mathrm{i}| \geq 1 \wedge |z - 1 - 2\mathrm{i}| < 3\}$,

(ii) $B = \big\{z \in \mathbb{C} | \, \mathrm{Im}(z^2) \leq 1\big\}$.

Aufgabe 17: [Komplexe Zahlen 2 **T**]

(a) Sei $z = 4 - 3\mathrm{i}$. Bestimmen Sie jeweils den Real- und Imaginärteil, sowie den Betrag von

(i) z^3,

(ii) $\frac{1}{z}$.

(b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^3 + 8 = 0.$$

Aufgabe 18:

(a) Seien $z = 3 - \mathrm{i}$ und $w = -1 + 2\mathrm{i}$. Bestimmen Sie jeweils den Real- und Imaginärteil, sowie den Betrag von

(i) $z \cdot w$,

(ii) $\overline{z}^2 + \frac{1}{w^2}$.

(b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^3 - (3 - \mathrm{i})z^2 - \mathrm{i}z + 1 + 3\mathrm{i} = 0.$$

Hinweis: Es gibt eine Lösung z mit $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$.

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 13, 15 und 17 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.