Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

WS2020/21
11.01.2021

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

7. Übungsblatt

Aufgabe 37:

(a) Sei $|z| < \min\{R_1, R_2\}$. Nach (a) im Abschnitt 7.14 der Vorlesung konvergieren die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ absolut. Ihr Cauchy-Produkt lautet

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} z^{n-k} b_k z^k = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right) z^n.$$

Nach Satz im Abschnitt 7.10 konvergiert es absolut und für den Reihenwert gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right).$$

Nach Folgerung (a) aus dem Abschnitt 7.14 des Skriptes gilt $R \geq \min\{R_1, R_2\}$.

(b) Für $k = 0$ ist $\binom{n+k}{k} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Also liegt die geometrische Reihe vor. Für $k = 1$ ist $\binom{n+k}{k} = \binom{n+1}{1} = \frac{(n+1)!}{(n+1-1)!1!} = n+1$. Nach Beispiel im Abschnitt 7.10 des Skriptes liegt also das Cauchyprodukt der geometrischen Reihe mit sich selbst vor. Es liegt die Vermutung nahe, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k} z^n = \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)\cdot_{\mathrm{CP}}\cdots\cdot_{\mathrm{CP}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)}_{k+1 \text{ Faktoren}}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$, wobei $\cdot_{\mathrm{CP}}$ das Cauchyprodukt bezeichnet. Ein Beweis gelingt mit vollständiger Induktion.

- *IA* ($k = 0$): klar.

- *IS* ($k \rightsquigarrow k+1$): Für ein $k \in \mathbb{N}_0$ gelte die *IH*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k} z^n = \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)\cdot_{\mathrm{CP}}\cdots\cdot_{\mathrm{CP}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)}_{k+1 \text{ Faktoren}}.$$

Nach Teilaufgabe (a) gilt für $k+1$

$$\begin{aligned}\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)\cdot_{\mathrm{CP}}\cdots\cdot_{\mathrm{CP}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)}_{k+1 \text{ Faktoren}}\cdot_{\mathrm{CP}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) &\overset{\text{(IH)}}{=} \left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k} z^n\right)\cdot_{\mathrm{CP}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\binom{m+k}{k}\cdot 1\right) z^n\\ &\overset{\text{A 13 (a)}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k+1}{k+1} z^n.\end{aligned}$$

Nach Teilaufgabe (a) gilt $R \geq 1$ und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^n = \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)}_{k+1 \text{ Faktoren}} = \left(\frac{1}{1-z}\right)^{k+1}$$

für alle $|z| < 1$. Ferner gilt

$$\binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)!}{n!k!} = \frac{\prod_{j=1}^{n+k} j}{\left(\prod_{j=1}^{n} j\right)\left(\prod_{j=1}^{k} j\right)} = \frac{\prod_{j=n+1}^{n+k} j}{\prod_{j=1}^{k} j} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n+j}{j} \geq 1$$

für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$. Damit ist

$$\left|\binom{n+k}{k} z^n\right| \geq 1$$

für alle $|z| \geq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Also ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^n$ divergent für alle $|z| \geq 1$. Nach Folgerung (b) aus dem Abschnitt 7.14 des Skriptes gilt $R \leq 1$. Insgesamt also $R = 1$.

□

Aufgabe 38:

(i) Es gilt

$$\binom{n+1}{1} = \frac{(n+1)!}{(n+1-1)!1!} = n+1$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Mit dem Ergebnis der Aufgabe 37 (b) gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{1}{(1-z)} = \frac{z}{(1-z)^2}$$

für alle $|z| < 1$.

Da $|nz^n| \geq n$ für alle $|z| \geq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$, ist (nz^n) keine Nullfolge für $|z| \geq 1$ und die Reihe ist divergent.

(ii) Es gilt

$$\binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)!}{(n+2-2)!2!} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} + 1$$

und somit $n^2 = 2\binom{n+2}{2} - 3n - 2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Mit dem Ergebnis der Aufgabe 37 (b) und der letzten Teilaufgabe gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n &= 2\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} z^n - 3\sum_{n=0}^{\infty} nz^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} z^n \\
&= \frac{2}{(1-z)^3} - \frac{3z}{(1-z)^2} - \frac{2}{(1-z)} = \frac{2 - 3z + 3z^2 - 2(1-z)^2}{(1-z)^3} \\
&= \frac{z+z^2}{(1-z)^3} = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}
\end{aligned}$$

für alle $|z| < 1$.

Da $\left|n^2 z^n\right| \geq n$ für alle $|z| \geq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$, ist $(n^2 z^n)$ keine Nullfolge für $|z| \geq 1$ und die Reihe ist divergent.

□

Aufgabe 39:
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $z \in D$. Wir zeigen die erste Identität. Nach (0) im Abschnitt 7.11 des Skriptes ist $e^0 = 1$. Also gilt

$$\begin{aligned} D_n(2z) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{\mathrm{i}2kz} = e^0 + \sum_{k=-n}^{1} e^{\mathrm{i}2kz} + \sum_{k=1}^{n} e^{\mathrm{i}2kz} = 1 + \sum_{k=1}^{n} e^{-2\mathrm{i}kz} + \sum_{k=1}^{n} e^{\mathrm{i}2kz} \\ &= 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\mathrm{i}2kz} + e^{-\mathrm{i}2kz}}{2} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kz), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung die Definition des Cosinuses aus Abschnitt 7.12 des Skriptes ist.

Für die zweite Identität benötigen wir die *verallgemeinerte geometrische Summenformel.* Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $m \in \mathbb{N}_0$. Es gilt

$$\begin{aligned} & w \sum_{k=-m}^{m} w^k = \sum_{k=-m}^{m} w^{k+1} = \sum_{k=-m+1}^{m+1} w^k = w^{m+1} - w^{-m} + \sum_{k=-m}^{m} w^k \\ \Leftrightarrow \quad & (w-1) \sum_{k=-m}^{m} w^k = w^{m+1} - w^{-m}. \end{aligned}$$

Ist also zusätzlich $w \neq 1$, so ist

$$\sum_{k=-m}^{m} w^k = \frac{w^{m+1} - w^{-m}}{w-1}.$$

Nach (0) im Abschnitt 7.12 des Skriptes und der obigen Summenformel folgt

$$\begin{aligned} & (e^{2\mathrm{i}z} - 1)D_n(2z) &=& (e^{2\mathrm{i}z} - 1) \sum_{k=-n}^{n} e^{2\mathrm{i}kz} = (e^{2\mathrm{i}z} - 1) \sum_{k=-n}^{n} \left(e^{2\mathrm{i}z}\right)^k \\ & &=& \left(e^{2\mathrm{i}z}\right)^{n+1} - \left(e^{2\mathrm{i}z}\right)^{-n} = e^{2\mathrm{i}(n+1)z} - e^{-2\mathrm{i}nz} \\ \overset{\cdot\left(\frac{e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\right)}{\Leftrightarrow} \quad & \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} D_n(2z) &=& \frac{e^{\mathrm{i}(2n+1)} - e^{-\mathrm{i}(2n+1)z}}{2\mathrm{i}} \\ \Leftrightarrow \quad & \sin(z)D_n(2z) &=& \sin((2n+1)z) \\ \overset{z\in D}{\Leftrightarrow} \quad & D_n(2z) &=& \frac{\sin((2n+1)z)}{\sin(z)}, \end{aligned}$$

wobei die vorletzte Äquivalenz die Definition des Sinuses aus Abschnitt 7.12 des Skriptes ist.
□

Aufgabe 40:

(i) Für alle $z \in D$ gilt

$$\frac{2\tan(z)}{1+\tan^2(z)} = \frac{2\frac{\sin(z)}{\cos(z)}}{1 + \frac{\sin^2(z)}{\cos^2(z)}} = 2\frac{\sin(z)\cos(z)}{\sin^2(z) + \cos^2(z)}.$$

Nach der Eulerformel aus (2) im Abschnitt 7.12 des Skriptes ist $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach dem Additionstheorem für sin aus (3) im gleichen Abschnitt, ist $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Insgesamt also tatsächlich $\frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)} = \sin(2x)$ für alle $x \in D \cap \mathbb{R}$.

(ii) Für alle $z \in D$ gilt

$$\frac{1-\tan^2(z)}{1+\tan^2(z)} = \frac{1-\frac{\sin^2(z)}{\cos^2(z)}}{1+\frac{\sin^2(z)}{\cos^2(z)}} = \frac{\cos^2(z)-\sin^2(z)}{\sin^2(z)+\cos^2(z)}.$$

Nach der Eulerformel aus (2) im Abschnitt 7.12 des Skriptes ist $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach dem Additionstheorem für cos aus (3) im gleichen Abschnitt, ist $\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Insgesamt also tatsächlich $\frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)} = \cos(2x)$ für alle $x \in D \cap \mathbb{R}$.

□

Aufgabe 41: Lösung handschriftlich im Mitschrieb zur Übung. PDF im Ordner Übung auf Ilias.

Aufgabe 42:

(i) Sei $U := \{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} : f \text{ hat mindestens eine Nullstelle}\}$ und $f, g \in \mathbb{R}^{[-1,1]}$ definiert durch

$$f(x) = 1 + x, \quad g(x) = -x$$

für alle $x \in [-1,1]$. Wegen $f(-1) = g(0) = 0$, ist $f, g \in U$. Aber $f + g \equiv 1$, d.h. für alle $x \in [-1,1]$ gilt

$$(f+g)(x) = 1 \neq 0.$$

Also $f + g \notin U$. Nach dem Untervektorraumkriterium (Satz im Abschnitt 8.4 des Skriptes) ist U kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$.

(ii) Sei $V := \{(a_n) \in c \mid \lim_{n\to\infty} a_n = a\}$. Wir verwenden das Untervektorraumkriterium (Satz im Abschnitt 8.4 des Skriptes), um zu überprüfen, ob V ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist.

- $0 \in V$: Wegen $0 = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ist $0 \in V \Leftrightarrow a = 0$. Sei also im Folgenden $a = 0$.

- Seien (a_n), $(b_n) \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zu zeigen ist $(a_n) + (b_n) \in V$ und $\alpha(a_n) \in V$. Wegen

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = 0 + 0 = 0 = a$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \alpha a_n = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \cdot 0 = 0 = a$$

ist in der Tat $(a_n) + (b_n) \in V$ und $\alpha(a_n) \in V$.

Also ist V genau für $a = 0$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(iii) Sei $W := \{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} : f(0) = 0\}$. Wir verwenden das Untervektorraumkriterium (Satz im Abschnitt 8.4 des Skriptes), um zu überprüfen, ob W ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$ ist.

- $0 \in W$: Wegen $0 = f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$ und damit $f(0) = 0$, ist $0 \in W$.
- Seien $f, g \in W$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zu zeigen ist $f + g \in W$ und $\alpha f \in W$: Wegen

$$(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$$

und

$$(\alpha f)(0) = \alpha f(0) = \alpha \cdot 0 = 0$$

ist in der Tat $f + g \in W$ und $\alpha f \in W$.