

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

8. Übungsblatt

Aufgabe 43:

Untersuchen Sie

- (i) die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+n^2x^4}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$,
- (ii) die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ mit $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g_n(x) = e^{-n(1+x+x^2)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$, sowie
- (iii) die Funktionenfolge (h_n) mit $h_n : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ und $h_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ für alle $x \in [a, \infty)$ und alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $0 \leq a < 1$ fest ist,
- (iv) die Funktionenfolge (h_n) mit $h_n : [a, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $h_n(x) = \sqrt[n]{n^2x}$ für alle $x \in [a, 1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $0 \leq a < 1$ fest ist,

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 44: [Stetigkeit T]

Bestimmen Sie jeweils eine Konstante y_0 so, dass die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf ihrem ganzen Definitionsbereich D stetig ist.

- (i) $D = [0, 1]$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x^2-4)(x-1)} & \text{für } x \in D \setminus \{1\}, \\ y_0 & \text{für } x = 1. \end{cases}$
- (ii) $D = (0, \infty)$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^r-1}{x-1} & \text{für } x \in D \setminus \{1\}, \\ y_0 & \text{für } x = 1, \end{cases}$ für ein festes $r \in \mathbb{Q}$.
- (iii) $D = [0, \pi]$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x \sin(x)}{\cos(x)-1} & \text{für } x \in D \setminus \{0\}, \\ y_0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$
- (iv) $D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} & \text{für } x \in D \setminus \{0\} \\ y_0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Aufgabe 45:

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Zeigen Sie, dass es ein $x_M \in \mathbb{R}$ gibt, für welches

$$|f(x)| \leq |f(x_M)|$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ausfällt.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 46: [Zwischenwertsatz **T**]

Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(1) =: y_0$. Zeigen Sie, dass dann ein $x_1 \in [0, \frac{1}{2}]$ existiert mit der Eigenschaft

$$f(x_1) = f\left(\frac{1}{2} + x_1\right).$$

Aufgabe 47: [Additionstheoreme **T**]

Zeigen Sie die folgenden Identitäten.

- (i) $\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y, x+y \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.
- (ii) $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|\arctan(x) + \arctan(y)| < \frac{\pi}{2}$.
- (iii) $(\cosh(x) + \sinh(x))^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$.
- (iv) $\operatorname{Artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ für alle $x \in (-1, 1)$.

Aufgabe 48: [n-te Einheitswurzel **T**]

(a) Zeigen Sie, dass für $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ der Abstand der Punkte $e^{i\varphi}$ und $e^{i\psi}$ durch

$$\left| e^{i\varphi} - e^{i\psi} \right| = 2 \left| \sin\left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right) \right|$$

gegeben ist.

(b) Sei $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die n -ten Einheitswurzeln — also Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ für $z \in \mathbb{C}$ — ein n -Eck mit Umfang $L_n = 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ bilden.

(c) Zeigen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = 2\pi.$$

(d) Interpretieren Sie die letzte Gleichung und zeichnen Sie für $n = 6$ ein Bild.

Aufgabe 49:

Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $N := \{x \in D \mid f(x) = 0\}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

- (a) N ist abgeschlossen.
- (b) Ist N nach unten beschränkt und nicht leer, so hat N ein Minimum.

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 43, 45 und 49 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.