

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

10. Übungsblatt

Aufgabe 56: [Taylor **T**]

- (i) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = x^2 - 2x + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Bestimmen Sie eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von $x_0 = 0$ die Funktion $\frac{1}{f}$ darstellt.
- (ii) Die Funktion $g : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $g(x) = \ln(1+x)$ für alle $x \in (-1, \infty)$ definiert. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_4(g; 0)$ und zeigen Sie, dass

$$0 \leq g(x) - T_4(g; 0)(x) \leq \frac{1}{5}x^5$$

für alle $x \geq 0$ gilt.

Aufgabe 57:

- (i) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = x^2 + 2x - 3$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Bestimmen Sie eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von $x_0 = -1$ die Funktion $\frac{1}{f}$ darstellt.
- (ii) Die Funktion $g : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $g(x) = e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ für alle $x \in (-1, \infty)$ definiert. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(g; \frac{1}{2})$ und geben Sie eine Konstante $C > 0$ an, für die

$$\left| g(x) - T_2\left(g; \frac{1}{2}\right)(x) \right| \leq C \left| x - \frac{1}{2} \right|^3$$

für alle $x \in [0, 1]$ gilt.

Aufgabe 58: [Integrale nach Riemann **T**]

Berechnen Sie mit Hilfe von geeigneten Riemannschen Zwischensummen die Grenzwerte

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^n k^p$, wobei $p \in \mathbb{N}$ fest ist, und
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$.

Aufgabe 59:

Berechnen Sie mit Hilfe von geeigneten Riemannschen Zwischensummen die Grenzwerte

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ und
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (k+n)^{\frac{1}{n}}$.

Aufgabe 60: [Integrale T]

Berechnen Sie die Integrale

(i) $\int_{-2}^2 |t-1| dt$,

(iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} t^2 \sin(2t) dt$ und

(ii) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t(1+\sqrt{t})}} dt$,

(iv) $\int_1^4 \arctan(\sqrt{\sqrt{t}-1}) dt$.

Aufgabe 61:

Berechnen Sie die Integrale

(i) $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(t)| dt$ für festes $k \in \mathbb{Z}$,

(iii) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin(t) dt$ und

(ii) $\int_1^e \frac{1}{t(1+\ln(t))} dt$,

(iv) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin(t)} dt$.

Hinweis: Beachten Sie es ist $\sin(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1+\tan^2(x)}$ für geeignete $x \in \mathbb{R}$.

Übungsklausur:

- Die Übungsklausur ist geplant am *Samstag, den 13. Februar 2021*, von *12:00 bis 14:00* als OPEN BOOK - EXAM in Ilias.
- Solange Sie die Klausur selbstständig bearbeiten sind alle Hilfsmittel zugelassen.
- Themenumfang der Übungsklausur ist der gesamte bis zum *12. Februar 2021* in den Vorlesungen und Übungen behandelte Stoff.
- Beachten Sie weitere Hinweise auf Ilias.

KEEP CALM

IT'S NOT
ROCKET SCIENCE

WAS? Die wissenschaftliche Analyse von Daten in Zeiten alternativer Fakten - Vortrag von Priv. Doz. Roger Wolf

WANN? Donnerstag, den 28.01.21 um 18:00 Uhr

WO? Zoom - Siehe dafür: <https://fachschaft.physik.kit.edu>

eine Veranstaltung des Mentorenprogramms

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 57, 59 und 61 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.