

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 61:

- (i) Die Menge der Nullstellen von f ist $N(f) = \{1\}$. Also ist $\frac{1}{f}$ auf $D = \mathbb{R} \setminus N(f)$ erklärt. Gesucht ist eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit positivem Konvergenzradius $r > 0$ und

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \forall x \in D : |x| < r.$$

Multiplizieren mit dem Nenner der linken Seite liefert die äquivalente Aussage

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \right) - 2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \\ \stackrel{\text{Index-Shift}}{=} &\left(\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \right) - 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \\ &= \left(\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \right) - 2 \left(a_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n \right) + \left(a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \right) \\ &= a_0 + (a_1 - 2a_0)x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-2} - 2a_{n-1} + a_n) x^n \quad \forall x \in D : |x| < r. \end{aligned}$$

Beide Seiten dieser Gleichung sind eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius. Nach Satz 11.15 des Skriptes (Koeffizientenvergleich) gilt

$$a_0 = 1, \quad a_1 - 2a_0 = 0, \quad \forall n \geq 2 : a_{n-2} - 2a_{n-1} + a_n = 0$$

Die ersten fünf Koeffizienten sind

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, & a_2 &= 2a_1 - a_0 = 4 - 1 = 3, & a_4 &= 2a_3 - a_2 = 8 - 3 = 5. \\ a_1 &= 2a_0 = 2, & a_3 &= 2a_2 - a_1 = 6 - 2 = 4, \end{aligned}$$

Das legt die Vermutung $a_n = n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ nahe. Wir beweisen dies durch vollständige Induktion über n .

IA ($n = 0$): Klar.

IS ($n \rightsquigarrow n + 1$): Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Es gelte die (IV) $a_k = k + 1$ für alle $k \in \{0, \dots, n\}$. Dann gilt für $n + 1$ das Folgende. Ist $n = 0$, so ist $a_{n+1} = a_1 = 2 = (n + 1) + 1$. Ist $n \geq 1$, so gilt

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} \stackrel{(IV)}{=} 2(n + 1) - (n - 1 + 1) = n + 2 = (n + 1) + 1.$$

Dies schließt den Beweis der Vermutung ab.

Wir müssen noch sicherstellen, dass die gefundene Potenzreihe einen positiven Konvergenzradius hat. Nach der Formel von Cauchy-Hadamard gilt

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1}} = 1 > 0.$$

Für alle $|x| < 1$ gilt also

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

- (ii) Die Funktion g ist beliebig oft differenzierbar. Wir berechnen die ersten fünf Ableitungen. Für alle $x \in (-1, \infty)$ gilt

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(1+x), & g^{(2)}(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2}, & g^{(4)}(x) &= -\frac{6}{(1+x)^4}, \\ g^{(1)}(x) &= \frac{1}{1+x}, & g^{(3)}(x) &= \frac{2}{(1+x)^3}, & g^{(5)}(x) &= \frac{24}{(1+x)^5}. \end{aligned}$$

Das Taylor-Polynom $T_4(g; 0)$ ist laut Abschnitt 11.12 des Skriptes Vorlesung durch

$$T_4(g; 0)(x) = \sum_{k=0}^4 \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = \ln(1) + 1x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{6}x^3 - \frac{6}{24}x^4 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Sei $x \geq 0$. Nach dem Satz von Taylor aus dem Abschnitt 11.12 des Skriptes gibt es ein $\xi \in (0, x)$ mit

$$g(x) - T_4(g; 0)(x) = \frac{g^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 = \frac{x^5}{5} \frac{1}{(1+\xi)^5}.$$

Wegen $0 < \frac{1}{(1+\xi)^5} < 1$ folgt

$$0 \leq g(x) - T_4(g; 0)(x) \leq \frac{1}{5}x^5.$$

□

Aufgabe 62:

- (i) Die Menge der Nullstellen von f ist $N(f) = \{-3, 1\}$. Also ist $\frac{1}{f}$ auf $D = \mathbb{R} \setminus N(f)$ erklärt. Gesucht ist eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit positivem Konvergenzradius $r > 0$ und

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n \quad \forall x \in D : |x+1| < r.$$

Multiplizieren mit dem Nenner der linken Seite liefert die äquivalente Aussage

$$\begin{aligned}
 1 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n \right) (x^2 + 2x - 3) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n \right) ((x+1)^2 - 4) \\
 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^{n+2} \right) - 4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n \right) \\
 &\stackrel{\text{Index-Shift}}{=} \left(\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} (x+1)^n \right) - 4 \left(a_0 + a_1 (x+1) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (x+1)^n \right) \\
 &= -4a_0 - 4a_1(x+1) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-2} - 4a_n)(x+1)^n \quad \forall x \in D : |x+1| < r.
 \end{aligned}$$

Beide Seiten dieser Gleichung sind eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius. Nach Satz 11.15 des Skriptes (Koeffizientenvergleich) gilt

$$-4a_0 = 1, \quad -4a_1 = 0, \quad \forall n \geq 2 : a_{n-2} - 4a_n = 0.$$

Damit ergibt sich induktiv

$$\begin{aligned}
 a_0 &= -\frac{1}{4}, & a_{2n} &= \frac{1}{4} a_{2(n-1)} = \dots = \left(\frac{1}{4}\right)^n a_0 = -\left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{1}{4} = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}, \\
 a_1 &= 0, & a_{2n+1} &= \frac{1}{4} a_{2(n-1)+1} = \dots = \left(\frac{1}{4}\right)^n a_1 = 0.
 \end{aligned}$$

Wir müssen noch sicherstellen, dass die gefundene Potenzreihe einen positiven Konvergenzradius hat. Nach der Formel von Cauchy-Hadamard gilt

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{4}}}} = 2 > 0.$$

Für alle $|x+1| < 2$ gilt also

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{n+1}} (x+1)^{2n}.$$

- (ii) Die Funktion g ist beliebig oft differenzierbar. Wir berechnen die ersten drei Ableitungen. Für alle $x \in (-1, \infty)$ gilt

$$\begin{aligned}
 g(x) &= e^{-x} + \frac{1}{1+x}, & g^{(2)}(x) &= e^{-x} + \frac{2}{(1+x)^3}, \\
 g^{(1)}(x) &= -e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^2}, & g^{(3)}(x) &= -e^{-x} - \frac{6}{(1+x)^4}.
 \end{aligned}$$

Das Taylor-Polynom $T_2(g; \frac{1}{2})$ ist laut Abschnitt 11.12 des Skriptes Vorlesung durch

$$\begin{aligned} T_{\frac{1}{2}}^2 g(x) &= \sum_{k=0}^2 \frac{g^{(k)}(\frac{1}{2})}{k!} \left(x - \frac{1}{2}\right)^k \\ &= \left(e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}\right) - \left(e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{(1 + \frac{1}{2})^2}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{(1 + \frac{1}{2})^3}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{4}{9}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{16}{27}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Sei $x \in [0, 1]$. Nach dem Satz von Taylor aus dem Abschnitt 11.12 des Skriptes gibt es ein ξ zwischen x und $\frac{1}{2}$ mit

$$g(x) - T_2\left(g; \frac{1}{2}\right)(x) = \frac{g^{(3)}(\xi)}{3!} \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 = -\left(\frac{1}{6\sqrt{e}} + \frac{1}{(1 + \xi)^4}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right)^3.$$

Aus $0 < \xi$ folgt

$$\left|g^{(3)}(\xi)\right| = \left|-e^{-\xi} - \frac{6}{(1 + \xi)^4}\right| = e^{-\xi} + \frac{6}{(1 + \xi)^4} \stackrel{\text{Monotonie}}{\leq} e^{-0} + \frac{6}{(1 + 0)^4} = 7.$$

Somit gilt mit $C := \frac{7}{6}$ wie gefordert

$$\left|g(x) - T_2\left(g; \frac{1}{2}\right)(x)\right| \leq C \left|x - \frac{1}{2}\right|^3$$

für alle $x \in [0, 1]$.

□

Aufgabe 63:

(i) Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^n k^p = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) |I_k| = \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}),$$

wobei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^p$,

$$Z_n = \left\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_n = \frac{n}{n} = 1\right\}, \quad \xi^{(n)} = (\xi_1, \dots, \xi_n) = (x_1, \dots, x_n).$$

Die Feinheit der äquidistanten Zerlegung Z_n des Intervalls $[0, 1]$ ist $\|Z_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Da $f \in R([a, b])$ nach Satz 12.5 des Skriptes, gilt $\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx$ nach Satz 12.7 des Skriptes. Eine Stammfunktion von f ist durch $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^{p+1}}{p+1}$ gegeben. Nach dem Hauptsatz (1) aus Abschnitt 12.10 des Skriptes gilt

$$\int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_{x=0}^1 = \frac{1}{p+1}.$$

(ii) Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{n}{k} \stackrel{\text{Index-}}{\text{shift}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n}{k+n-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k-1}{n}} = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) |I_k| = \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}),$$

wobei $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x}$,

$$Z_n = \left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{n-1}{n}, x_n = \frac{n}{n} = 1 \right\}, \quad \xi^{(n)} = (x_0, \dots, x_{n-1}).$$

Die Feinheit der äquidistanten Zerlegung Z_n des Intervalls $[0, 1]$ ist $\|Z_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Da $f \in R([a, b])$ nach Satz 12.5 des Skriptes, gilt $\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx$ nach Satz 12.7 des Skriptes. Eine Stammfunktion von f ist durch $F : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(1+x)$ gegeben. Nach dem Hauptsatz (1) aus Abschnitt 12.10 des Skriptes gilt

$$\int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_{x=0}^1 = \ln(2).$$

□

Aufgabe 64:

(i) Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) |I_k| = \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}),$$

wobei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$,

$$Z_n = \left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_n = \frac{n}{n} = 1 \right\}, \quad \xi^{(n)} = (\xi_1, \dots, \xi_n) = (x_1, \dots, x_n).$$

Die Feinheit der äquidistanten Zerlegung Z_n des Intervalls $[0, 1]$ ist $\|Z_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Da $f \in R([a, b])$ nach Satz 12.5 des Skriptes, gilt $\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx$ nach Satz 12.7 des Skriptes. Eine Stammfunktion von f ist durch $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ gegeben. Nach dem Hauptsatz (1) aus Abschnitt 12.10 des Skriptes gilt

$$\int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_{x=0}^1 = \frac{2}{\pi}.$$

(ii) Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (k+n)^{\frac{1}{n}} &= \prod_{k=1}^n \left(\frac{k+n}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)\right) \\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^n \ln\left(\left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)\right) \\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^n f(\xi_k) |I_k|\right) = \exp\left(\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)})\right), \end{aligned}$$

wobei $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(1+x)$,

$$Z_n = \left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{n-1}{n}, x_n = \frac{n}{n} = 1 \right\}, \quad \xi^{(n)} = (x_1, \dots, x_n).$$

Die Feinheit der äquidistanten Zerlegung Z_n des Intervalls $[0, 1]$ ist $\|Z_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Da $f \in R([a, b])$ nach Satz 12.5 des Skriptes, gilt $\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx$ nach Satz 12.7 des Skriptes. Da die Exponentialfunktion stetig ist, gilt $\exp((\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}))) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp\left(\int_0^1 f(x) dx\right)$. Eine Stammfunktion von f ist durch

$$F : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x+1) \ln(x+1) - x$$

gegeben (vgl. Beispiel (2) im Abschnitt 12.12 des Skriptes). Nach dem Hauptsatz (1) aus Abschnitt 12.10 des Skriptes gilt

$$\exp\left(\int_0^1 f(x) dx\right) = \exp\left([F(x)]_{x=0}^1\right) = \exp(2 \ln(2) - 1) = \frac{(e^{\ln(2)})^2}{e} = \frac{4}{e}.$$

□

Aufgabe 65:

Wir halten zunächst fest, dass jeder Integrand auf dem jeweiligen Integrationsintervall stetig ist und deshalb auch integrierbar nach Satz aus Abschnitt 12.5 des Skriptes.

(i) Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 |t-1| dt &= \int_{-2}^1 |t-1| dt + \int_1^2 |t-1| dt = \int_{-2}^1 (1-t) dt + \int_1^2 (t-1) dt \\ &= \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_{t=-2}^{t=1} + \left[\frac{t^2}{2} - t \right]_{t=1}^{t=2} = 5. \end{aligned}$$

(ii) Es gilt nach der Substitutionsregel aus dem Abschnitt 12.13 des Skriptes

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})} dt &= \int_1^4 \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{t}}}_{=g'(t)} \underbrace{\frac{2}{1+\sqrt{t}}}_{=f(g(t))} dt = \int_{g(1)}^{g(4)} f(x) dx = \int_1^2 \frac{2}{1+x} dx \\ &= 2 [\ln(1+x)]_{x=1}^2 = 2(\ln(3) - \ln(2)) = 2 \ln\left(\frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

(iii) Es gilt nach der Regel der partiellen Integration aus Abschnitt 12.12 des Skriptes

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{1}{2}t^2}_{=g(t)} \underbrace{\sin(2t)}_{=f'(t)} dt &\stackrel{\text{P.I.}}{=} - \left[\frac{1}{2} \cos(2t) \cdot \frac{1}{2}t^2 \right]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos(2t) dt \\ &= \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos(2t) dt. \end{aligned}$$

Das verbliebene Integral wird wieder partiell integriert zu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{t}_{=g(t)} \underbrace{\cos(2t)}_{=f'(t)} dt \stackrel{\text{P.I.}}{=} \left[t \cdot \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t) dt = \frac{1}{4} [\cos(2t)]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Insgesamt also

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} t^2 \sin(2t) dt = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}.$$

(iv) Es gilt nach der Substitutionsregel aus dem Abschnitt 12.13 des Skriptes

$$\begin{aligned} \int_1^4 \arctan\left(\sqrt{\sqrt{t}-1}\right) dt & \stackrel{t=s^2}{=} \int_1^2 2s \arctan(\sqrt{s-1}) ds \\ & \stackrel{s=x^2+1}{=} 4 \int_0^1 (x^2+1)x \arctan(x) dx. \\ & \stackrel{\frac{ds}{dx}=2x}{=} \end{aligned}$$

Weiter gilt nach der Regel der partiellen Integration aus Abschnitt 12.12 des Skriptes

$$\begin{aligned} \int_0^1 \underbrace{4(x^2+1)}_{f'(x)} \underbrace{x \arctan(x)}_{g(x)} dx & = [(x^4+2x^2) \arctan(x)]_{x=0}^1 - \int_0^1 \frac{x^4+2x^2}{1+x^2} dx \\ & = \frac{3}{4}\pi - \int_0^1 \frac{(1+x^2)^2-1}{1+x^2} dx \\ & = \frac{3}{4}\pi + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx - \int_0^1 1+x^2 dx \\ & = \frac{3}{4}\pi + [\arctan(x)]_{x=0}^{x=1} - \left[x + \frac{1}{3}x^3 \right]_{x=0}^{x=1} = \pi - \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 66:

Wir halten zunächst fest, dass jeder Integrand auf dem jeweiligen Integrationsintervall stetig ist und deshalb auch integrierbar nach Satz aus Abschnitt 12.5 des Skriptes.

- (i) Die Nullstellenmenge des Sinuses ist $\pi\mathbb{Z}$ (siehe Abschnitt 10.2 des Skriptes). Also hat der Sinus für jedes $k \in \mathbb{Z}$ auf $[(k-1)\pi, k\pi]$ keinen Vorzeichenwechsel (Zwischenwertsatz aus Abschnitt 9.9 des Skriptes). Folglich gilt

$$\begin{aligned} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(t)| dt & = \left| \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin(t) dt \right| = \left| -[\cos(t)]_{t=(k-1)\pi}^{t=k\pi} \right| \\ & = \left| (-1)^k - (-1)^{(k-1)} \right| = \left| (-1)^k + (-1)^k \right| = 2. \end{aligned}$$

(ii) Es gilt nach der Substitutionsregel aus dem Abschnitt 12.13 des Skriptes

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{1}{t(1+\ln(t))} dt &= \int_1^e \underbrace{\frac{1}{t}}_{=g'(t)} \underbrace{\frac{1}{1+\ln(t)}}_{=f(g(t))} dt = \int_{g(1)}^{g(e)} f(x) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_{x=0}^1 = \ln(2). \end{aligned}$$

(iii) Es gilt nach der Regel der partiellen Integration aus Abschnitt 12.12 des Skriptes

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin(t) dt &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \underbrace{1}_{=f'(t)} \underbrace{\arcsin(t)}_{=g(t)} dt = [t \arcsin(t)]_{t=0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt. \end{aligned}$$

Weiter gilt nach der Substitutionsregel aus Abschnitt 12.13 des Skriptes

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \underbrace{2t}_{=g'(t)} \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}}_{=f(g(t))} dt = \int_{g(0)}^{g(\frac{\sqrt{2}}{2})} f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\sqrt{1-x}} dx \\ &= -[\sqrt{1-x}]_{x=0}^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Insgesamt also

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin(t) dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + [\sqrt{1-t^2}]_{t=0}^{t=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1.$$

(iv) Nach Aufgabe 40 (i) gilt

$$\sin(t) = \frac{2 \tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

für alle $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right] \subseteq \mathbb{R} \setminus \pi(2\mathbb{Z} + 1)$. Folglich ist

$$\frac{1}{\sin(t)} = \frac{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \tan\left(\frac{t}{2}\right)} \quad \forall t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right].$$

Es gilt nach der Substitutionsregel aus dem Abschnitt 12.13 des Skriptes (für Werte des Tangens siehe Aufgabe 50)

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin(t)} dt &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \tan\left(\frac{t}{2}\right)} dt \stackrel{\substack{t=2 \arctan(s) \\ \frac{dt}{ds} = \frac{2}{1+s^2}}}{=} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+s^2}{2s} \cdot \frac{2}{1+s^2} ds \\ &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{s} ds = [\ln(s)]_{s=1}^{s=\sqrt{3}} = \frac{\ln(3)}{2}. \end{aligned}$$

□