Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

WS2020/21
05.02.2021

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 68:

(i) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Löse formal

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -y^2 \\
\rightsquigarrow \mathrm{d}y\frac{1}{y^2} &= -\mathrm{d}x \\
\rightsquigarrow \int_{y(0)}^{y(x)} \frac{1}{\eta^2}\mathrm{d}\eta &= -\int_0^x \mathrm{d}\xi \\
\Rightarrow -\left[\frac{1}{\eta}\right]_{\eta=-1}^{y(x)} &= -x \\
\Leftrightarrow \frac{1}{y(x)} &= x-1 \\
\Leftrightarrow y(x) &= \frac{1}{x-1}.
\end{aligned}$$

Die obige Formel gilt auf dem größten Intervall I mit $0 \in I$, $-(y(x))^2 \neq 0$ und $x-1<0$ für alle $x \in I$ — also $I = (-\infty, 1)$. Wegen $\lim_{x\to 1} y(x) = -\infty$, ist y nicht weiter nach rechts fortsetzbar und I ist das maximale Existenzintervall.

(ii) Die Differentialgleichung ist eine lineare Differentialgleichung. Ihre Lösung ist durch die Variation-der-Konstanten-Formel

$$y(x) = e^{\int_0^x 1\mathrm{d}\xi} \cdot y(0) + e^{\int_0^x 1\mathrm{d}\xi} \int_0^x e^{-\int_0^\eta 1\mathrm{d}\xi}(1+\eta)\mathrm{d}\eta$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Berechne

$$\begin{aligned}
\int_0^x 1\mathrm{d}\xi &= x, \\
\int_0^x \underbrace{e^{-\eta}}_{=f'(\eta)} \underbrace{(1+\eta)}_{=g(\eta)}\mathrm{d}\eta &\overset{\text{Part. Int.}}{=} -\left[e^{-\eta}(1+\eta)\right]_{\eta=0}^x + \int_0^x e^{-\eta}\mathrm{d}\eta \\
&= 1-(1+x)e^{-x} - \left[e^{-\eta}\right]_{\eta=0}^x = 2-(2+x)e^{-x}
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Folglich ist $y(x) = 2e^x - 2 - x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

□

Aufgabe 69:

(i) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Löse formal

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\sin(y)}{x} \\
\rightsquigarrow \mathrm{d}y\frac{1}{\sin(y)} &= \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
\rightsquigarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{y(x)} \frac{1}{\sin(\eta)}\mathrm{d}\eta &= \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{1}{\xi}\mathrm{d}\xi \\
\overset{\text{vgl. A66(iv)}}{\Leftrightarrow} \left[\ln\left(\tan\left(\frac{\eta}{2}\right)\right)\right]_{\eta=\frac{\pi}{2}}^{y(x)} &= [\ln(\xi)]_{\xi=\frac{1}{2}}^{x} \\
\Leftrightarrow \ln\left(\tan\left(\frac{y(x)}{2}\right)\right) &= \ln(2x) \\
\Leftrightarrow y(x) &= 2\arctan(2x).
\end{aligned}$$

Die obige Formel gilt auf dem größten Intervall I mit $\frac{\pi}{2} \in I$, $\sin(y(x)) \neq 0$ und $0 < x$ für alle $x \in I$ (letzte Einschränkung kommt von der DGL). Wegen

$$0 < y(x) = 2\arctan(2x) < \pi$$

ist $I = (0, \infty)$. Dies ist das maximale Existenzintervall.

(ii) Die Differentialgleichung ist eine lineare Differentialgleichung. Ihre Lösung ist durch die Variation-der-Konstanten-Formel

$$y(x) = e^{-\int_0^x \frac{2}{1-\xi}\mathrm{d}\xi} \cdot y(0) + e^{-\int_0^x \frac{2}{1-\xi}\mathrm{d}\xi} \int_0^x e^{\int_0^\eta \frac{2}{1-\xi}\mathrm{d}\xi} \frac{1}{1-\eta}\mathrm{d}\eta$$

für alle $x \in (-\infty, 1)$ gegeben.

Es gilt

$$\begin{aligned}
-\int_0^x \frac{2}{1-\xi}\mathrm{d}\xi &= [2\ln(1-\xi)]_{\xi=0}^{x} = 2\ln(1-x), \\
\int_0^x e^{-2\ln(1-\eta)}\frac{1}{1-\eta}\mathrm{d}\eta &= \int_0^x \frac{1}{(1-\eta)^3}\mathrm{d}\eta = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-\eta)^2}\right]_{\eta=0}^{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^2} - 1\right)
\end{aligned}$$

für alle $x \in (-\infty, 1)$. Folglich ist $y(x) = \frac{1-(1-x)^2}{2}$ für alle $x \in (-\infty, 1)$.

□

Aufgabe 70:

(i) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (siehe Abschnitt 13.5 des Skriptes). Das charakteristische Polynom ist durch

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

gegeben und hat genau die Nullstellen $\lambda_1 = (-1 - \mathrm{i})$ und $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = (-1 + \mathrm{i})$, jeweils mit Vielfachheit eins. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet daher

$$y_h(x) = C_1 e^{-x}\cos(x) + C_2 e^{-x}\sin(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Für eine partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz „von der Form der rechten Seite"

$$y_p(x) = xe^{-x}\left[C_1\cos(x) + C_2\sin(x)\right]$$

und berechnen

$$\begin{aligned}
y_p'(x) &= e^{-x}[-(C_1 x\cos(x) + C_2 x\sin(x)) + (C_1\cos(x) + C_2\sin(x)) \\
&\quad +(-xC_1\sin(x) + xC_2\cos(x))] \\
&= e^{-x}\left[C_1\cos(x) + C_2\sin(x) + (C_2 - C_1)x\cos(x) - (C_1 + C_2)x\sin(x)\right], \\
y_p''(x) &= e^{-x}[-(C_1\cos(x) + C_2\sin(x) + (C_2 - C_1)x\cos(x) - (C_1 + C_2)x\sin(x)) \\
&\quad +(-C_1\sin(x) + C_2\cos(x)) + (C_2 - C_1)(\cos(x) - x\sin(x)) \\
&\quad -(C_1 + C_2)(\sin(x) + x\cos(x))] \\
&= e^{-x}\left[2(C_2 - C_1)\cos(x) - 2(C_1 + C_2)\sin(x) - 2C_2 x\cos(x) + 2C_1 x\sin(x)\right].
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned}
y_p''(x) + 2y_p'(x) + 2y_p(x) &= e^{-x}\cos(x) \\
\Leftrightarrow (2(C_2 - C_1)\cos(x) - 2(C_1 + C_2)\sin(x) - 2C_2 x\cos(x) + 2C_1 x\sin(x)) & \\
+2(C_1\cos(x) + C_2\sin(x) + (C_2 - C_1)x\cos(x) - (C_1 + C_2)x\sin(x)) & \\
+2(C_1 x\cos(x) + C_2 x\sin(x)) &= \cos(x) \\
\Leftrightarrow 2C_2\cos(x) - 2C_1\sin(x) &= \cos(x) \\
\Leftrightarrow (2C_2 - 1)\cos(x) - 2C_1\sin(x) &= 0.
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt $C_1 = 0$ und $C_2 = \frac{1}{2}$. Damit ist $y_p(x) = \frac{x}{2}\sin(x)e^{-x}$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$y(x) = C_1 e^{-x}\cos(x) + C_2 e^{-x}\sin(x) + \frac{x}{2}\sin(x)e^{-x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Diese werden wie folgt durch die Anfangsbedingungen festgelegt

$$\begin{aligned}
y(0) &= \left[C_1 e^{-x}\cos(x) + C_2 e^{-x}\sin(x) + \frac{x}{2}\sin(x)e^{-x}\right]_{x=0} = C_1 \overset{!}{=} 0 \\
\Rightarrow C_1 &= 0, \\
y'(0) &= \left[C_2 e^{-x}(\cos(x) - \sin(x)) + \frac{1}{2}e^{-x}(-x\sin(x) + \sin(x) + x\cos(x))\right]_{x=0} = C_2 \overset{!}{=} 0 \\
\Rightarrow C_2 &= 0
\end{aligned}$$

Also ist $y = y_p$ die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems.

(ii) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (siehe Abschnitt 13.5 des Skriptes). Das charakteristische Polynom ist durch

$$q(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

gegeben und hat genau eine doppelte Nullstelle $\lambda_1 = 1$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet daher

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Für eine partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz „von der Form der rechten Seite“

$$y_p(x) = C x^2 e^x$$

und berechnen

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= C e^x (x^2 + 2x), \\ y_p''(x) &= C e^x (x^2 + 2x + 2x + 2) \\ &= C e^x (x^2 + 4x + 2). \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} y_p''(x) - 2y_p'(x) + y_p(x) &= e^x \\ \Leftrightarrow C((x^2 + 4x + 2) - 2(x^2 + 2x) + x^2) &= 1 \\ \Leftrightarrow 2C &= 1 \\ \Leftrightarrow C &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist $y_p(x) = \frac{x^2}{2} e^x$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{x^2}{2} e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Diese werden wie folgt durch die Anfangsbedingungen festgelegt

$$\begin{aligned} y(0) &= \left[C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{x^2}{2} e^x \right]_{x=0} = C_1 \stackrel{!}{=} 1 \\ \Rightarrow C_1 &= 1, \\ y'(0) &= \left[e^x + C_2 (x+1) e^x + \left(\frac{x^2}{2} + x \right) e^x \right]_{x=0} = 1 + C_2 \stackrel{!}{=} 2 \\ \Rightarrow C_2 &= 1. \end{aligned}$$

Also die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems durch $y(x) = e^x \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

□

Aufgabe 71:

(i) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (siehe Abschnitt 13.5 des Skriptes). Das charakteristische Polynom ist durch

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

gegeben und hat genau eine doppelte Nullstelle $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$y_h(x) = C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 x e^{-\frac{x}{2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Für eine partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz „von der Form der rechten Seite“

$$y_p(x) = C x^2 e^{-\frac{x}{2}}$$

und berechnen

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= C e^{-\frac{x}{2}} \left(2x - \frac{x^2}{2} \right), \\ y_p''(x) &= C e^{-\frac{x}{2}} \left((2-x) - \frac{1}{2} \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \right) \\ &= C e^{-\frac{x}{2}} \left(\frac{x^2}{4} - 2x + 2 \right). \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} y_p''(x) + y_p'(x) + \frac{y_p(x)}{4} &= e^{-\frac{x}{2}} \\ \overset{e^{-\frac{x}{2}} \neq 0}{\Leftrightarrow} C \left(\left(\frac{x^2}{4} - 2x + 2 \right) + \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{x^2}{4} \right) &= 1 \\ \Leftrightarrow 2C &= 1 \\ \Leftrightarrow C &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist $y_p(x) = \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x}{2}}$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 x e^{-\frac{x}{2}} + \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x}{2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Diese werden wie folgt durch die Anfangsbedingungen festgelegt

$$\begin{aligned} y(0) &= \left[C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 x e^{-\frac{x}{2}} + \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x}{2}} \right]_{x=0} = C_1 \overset{!}{=} 1 \\ \Rightarrow C_1 &= 1, \\ y'(0) &= \left[-\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} + C_2 \left(1 - \frac{x}{2} \right) e^{-\frac{x}{2}} + \left(-\frac{x^2}{4} + x \right) e^{-\frac{x}{2}} \right]_{x=0} = C_2 - \frac{1}{2} \overset{!}{=} 1 \\ \Rightarrow C_2 &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Also ist

$$y(x) = \left(1 + \frac{3x + x^2}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems.

(ii) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (siehe Abschnitt 13.5 des Skriptes). Das charakteristische Polynom ist durch

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

gegeben und hat genau die Nullstellen $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2$, jeweils mit Vielfachheit eins. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$y_1(x) = C_1 + C_2 e^{2x} \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Setze $f_1(x) = -2x$, $f_2(x) = \sin(2x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Bestimme partikuläre Lösungen für die Inhomogenitäten f_1 bzw. f_2 jeweils durch einen Ansatz „von der Form der rechten Seite“.

- f_1 (Nullstelle des charakteristischen Polynoms): Mache Ansatz

  $$y_p^{(1)}(x) = x(a_0 + a_1 x) = a_0 x + a_1 x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

  Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

  $$\begin{aligned} y_p^{(1)\prime\prime}(x) - 2y_p^{(1)\prime}(x) &= f_1(x) \Leftrightarrow 2a_1 - 2a_0 - 4a_1 x = -2x \\ \overset{\text{Koeff.-Vergleich}}{\Leftrightarrow} -4a_1 = -2 &\wedge \ 2a_1 - 2a_0 = 0 \\ a_1 = \frac{1}{2} &\wedge \ a_0 = a_1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

  Also ist $y_p^1(x) = \frac{x(1+x)}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ eine partikuläre Lösung zur Inhomogenität f_1.

- f_2 (keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms): Mache Ansatz

  $$y_p^{(2)}(x) = (a_0 \cos(2x) + a_1 \sin(2x)) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

  Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

  $$\begin{aligned} y_p^{(2)\prime\prime}(x) - 2y_p^{(2)\prime}(x) &= f_2(x) \\ \Leftrightarrow -4a_0\cos(2x) - 4a_1\sin(2x) + 4a_0\sin(2x) - 4a_1\cos(2x) &= \sin(2x) \\ \overset{\text{Koeff.-Vergleich}}{\Leftrightarrow} -4a_0 - 4a_1 = 0 &\wedge \ -4a_1 + 4a_0 = 1 \\ a_0 = -a_1 &\wedge \ a_0 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

  Also ist $y_p^2(x) = \frac{1}{8}(\cos(2x) - \sin(2x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$ eine partikuläre Lösung zur Inhomogenität f_2.

Insgesamt ist

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{x(1+x)}{2} + \frac{1}{8}(\cos(2x) - \sin(2x)) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Diese werden wie folgt durch die Anfangsbedingungen festgelegt

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 + \frac{1}{8} \overset{!}{=} \frac{1}{8} \\ \Rightarrow C_1 &= -C_2, \\ y'(0) &= \left[2C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} + x - \frac{1}{4}\left(\sin(2x) + \cos(2x)\right)\right]_{x=0} = 2C_2 + \frac{1}{4} \overset{!}{=} 0 \\ \Rightarrow C_2 &= -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Also ist

$$y(x) = \frac{1 - e^{2x}}{8} + \frac{x(1+x)}{2} + \frac{1}{8}(\cos(2x) - \sin(2x)) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems.

□

Aufgabe 72:

(i) Für jedes $b > 2$ gilt

$$\int_2^b \frac{1}{x(\ln(x))^2} \mathrm{d}x \underset{\mathrm{d}x = x\mathrm{d}y s}{\overset{x=e^y}{=}} \int_{\ln(2)}^{\ln(b)} \frac{1}{y^2} \mathrm{d}y = -\left[\frac{1}{y}\right]_{y=\ln(2)}^{\ln(b)} = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(b)}.$$

Folglich ist das uneigentliche Integral $\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^2}\mathrm{d}x$ konvergent und es gilt

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^2} \mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x(\ln(x))^2} \mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(b)}\right) = \frac{1}{\ln(2)}.$$

(ii) Für alle $0 < x \leq 1$ gilt $x^2 < x < \sqrt{x}$. Damit folgt

$$0 < \left|\frac{1}{2\sqrt{x} - x^2}\right| = \frac{1}{\sqrt{x} + \underbrace{(\sqrt{x} - x^2)}_{>0}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

für alle $0 < x \leq 1$. Sei $0 < a < 1$. Es gilt

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = 2\left[\sqrt{x}\right]_{x=a}^1 = 2 - 2\sqrt{a} \xrightarrow{a\to 0+} 2.$$

Also ist das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ konvergent. Nach dem Majorantenkriterium aus Abschnitt 14.4 des Skriptes ist auch das Integral $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}-x^2}\mathrm{d}x$ (absolut) konvergent.

(iii) Für alle $x \in [1, \infty)$ gilt $1 + \frac{1}{2}\cos^{2017}(x) \geq \frac{1}{2}$ und folglich $\frac{1+\frac{1}{2}\cos^{2017}(x)}{x} \geq \frac{1}{2x} > 0$. Ferner ist

$$\int_1^\infty \frac{1}{2x} \mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{2x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \left[\ln(x)\right]_{x=1}^b = \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \ln(b) = \infty.$$

Nach dem Minorantenkriterium für uneigentliche Integrale aus Abschnitt 14.4 des Skriptes ist auch das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{1+\frac{1}{2}\cos^{2017}(x)}{x}\mathrm{d}x$ divergent.

□

Aufgabe 73:

(i) Für jedes $x \in (0, \pi)$ gilt

$$\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin(x)}{x\sin(x)} = \frac{x - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}}{x \sin(x)} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} x^{2k-1}}{\frac{\sin(x)}{x}}.$$

Alle vorkommenden Potenzreihen haben unendlichen Konvergenzradius. Die Funktion $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ lässt sich stetig auf $\mathbb{R}$ fortsetzen, wobei die Fortsetzung in 0 keine Nullstelle hat. Folglich ist das Integral bei 0 nicht uneigentlich.

(ii) Für jedes $b > 0$ gilt

$$\begin{aligned}\int_0^b \underbrace{e^{-x}}_{f'(x)} \underbrace{\ln(1+x)}_{g(x)} \mathrm{d}x &\overset{\text{Part. Int.}}{=} -\left[e^{-x}\ln(1+x)\right]_{x=0}^b + \int_0^b e^{-x}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\log(1+b)}{e^b} + \int_0^b e^{-x}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{b\to\infty} \frac{\log(1+b)}{\underbrace{e^b}_{\to\infty}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{b\to\infty} \frac{1}{(1+b)\underbrace{e^b}_{\neq 0}} = 0$$

ist das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{-x}\log(1+x)\mathrm{d}x$ genau dann konvergent, wenn das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{-x}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$ konvergent ist. Dieses ist tatsächlich der Fall nach dem Majorantenkriterium aus Abschnitt 14.4 des Skriptes. Für alle $0 \leq x < \infty$ gilt

$$e^{-x}\frac{1}{1+x} \leq e^{-x}, \text{ und } \int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\mathrm{d}x \lim_{b\to\infty} - \left[e^{-x}\right]_{x=0}^b = 1 - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = 1.$$

(iii) Wir untersuchen den Integranden „in der Nähe der unteren Grenze“. Es gilt

$$\log(x) \leq \log\left(\frac{1}{e}\right) = -1$$

für alle $0 < x \leq \frac{1}{e}$. Ferner folgt aus der Potenzreihendarstellung des sinh

$$\begin{aligned}0 < \sinh(x) - x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} - x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} \\ &\overset{\text{Index-Shift}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)!}x^{2n+3} = x^3 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)!}x^{2n}}_{=:h(x)>0}\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Die durch den obigen Ausdruck definierte Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist als Potenzreihe stetig und nimmt auf $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ ihr Maximum M an. Folglich gilt

$$-\frac{x\ln(x)}{\sinh(x) - x} \geq \frac{x\ln(e)}{x^3 h(x)} \geq \frac{1}{x^2 M}$$

für alle $0 < x \leq \frac{1}{e}$. Wegen

$$\int_a^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x^2 M} \mathrm{d}x = -\frac{1}{M} \left[\frac{1}{x}\right]_{x=a}^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{M} \left(\frac{1}{a} - e\right) \xrightarrow{a \to 0+} \infty$$

ist das uneigentliche Integral $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x^2 M} \mathrm{d}x$ divergent. Nach dem Minorantenkriterium aus Abschnitt 14.4 des Skriptes ist dann auch das uneigentliche Integral

$$-\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{x \ln(x)}{\sinh(x) - x} \mathrm{d}x$$

divergent. Nach Definition aus Abschnitt 14.1 des Skriptes ist das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x \ln(x)}{\sinh(x) - x} \mathrm{d}x$$

ebenfalls divergent.

□