

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

- (a) (i) Bezeichne $G(d)$ die Aussagenform „der Deutsche d ist groß“ und $B(d)$ die Aussagenform „der Deutsche d trinkt Bier“. Dann lässt sich die Aussage der Aufgabenstellung durch

$$\forall d : G(d) \wedge B(d)$$

formal ausdrücken. Entsprechend ist ihre Verneinung durch

$$\neg(\forall d : G(d) \wedge B(d)) \Leftrightarrow \exists d : \neg(G(d) \wedge B(d)) \Leftrightarrow \exists d : \neg G(d) \vee \neg B(d)$$

gegeben. In Worten also: „Es gibt (mindestens) einen Deutschen, der nicht groß ist oder kein Bier trinkt.“

- (ii) Bezeichne $P(t, d)$ die Aussagenform „der Deckel d passt auf den Topf t . Dann lässt sich die Aussage der Aufgabenstellung durch

$$\forall t : \exists d : P(t, d)$$

formal ausdrücken. Entsprechend ist ihre Verneinung durch

$$\neg(\forall t : \exists d : P(t, d)) \Leftrightarrow \exists t : \neg(\exists d : P(t, d)) \Leftrightarrow \exists t : \forall d : \neg P(t, d)$$

gegen. In Worten also: „Es gibt einen Topf auf den kein Deckel passt.“

- (b) Es gilt

$$\begin{aligned} \neg A \vee (B \wedge A) &\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee A) \\ &\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge \text{wahr} \\ &\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \\ &\Leftrightarrow (A \Rightarrow B). \end{aligned}$$

□

Aufgabe 2:

- (a) (i) Bezeichne $B(t)$ die Aussagenform „zum Zeitpunkt t läuft Batman im Kino“, J die Aussagenform „zum Zeitpunkt t läuft James Bond im Kino“ und $I(t)$ die Aussagenform „ich gehe zum Zeitpunkt t ins Kino“. Dann lässt sich die Aussage der Aufgabenstellung durch

$$\forall t : B(t) \vee J(t) \Rightarrow I(t)$$

formal ausdrücken. Entsprechend ist ihre Verneinung durch

$$\neg(\forall t : (B(t) \vee J(t)) \Rightarrow I(t)) \Leftrightarrow \exists t : \neg((B(t) \vee J(t)) \Rightarrow I(t)) \Leftrightarrow \exists t : \neg I(t) \wedge (B(t) \vee J(t))$$

gegeben. In Worten also: „Manchmal gehe ich nicht ins Kino, obwohl Batman oder James Bond gezeigt werden.“

- (ii) Zuerst werden die formalen Symbole v für Bundesligaverein, s für Spiel sowie die Funktionen $T(v, s)$ für die Anzahl der Tore, die der Verein v im Spiel s geschossen hat und $A(v, s)$ für die Anzahl der ausgewechselten Spieler des Vereins v im Spiel s eingeführt. Dann lässt sich die Aussage der Aufgabenstellung durch

$$\exists v : \forall s : T(v, s) \leq 3 \wedge A(v, s) \geq 1$$

formal ausdrücken. Entsprechend ist ihre Verneinung durch

$$\begin{aligned} \neg(\exists v : \forall s : T(v, s) \leq 3 \wedge A(v, s) \geq 1) &\Leftrightarrow \forall v : \neg(\forall s : T(v, s) \leq 3 \wedge A(v, s) \geq 1) \\ &\Leftrightarrow \forall v : \exists s : \neg(T(v, s) \leq 3 \wedge A(v, s) \geq 1) \\ &\Leftrightarrow \forall v : \exists s : \neg(T(v, s) \leq 3) \vee \neg(A(v, s) \geq 1) \\ &\Leftrightarrow \forall v : \exists s : T(v, s) > 3 \vee A(v, s) < 1 \\ &\Leftrightarrow \forall v : \exists s : T(v, s) > 3 \vee A(v, s) = 0, \end{aligned}$$

gegeben. In Worten also: „Jeder Bundesligaverein hat in mindestens einem Spiel mehr als drei Tore geschossen oder hat keinen Spieler ausgewechselt.“

- (b) Wir setzen die Umformulierung der Implikation aus der Vorlesung in die zu zeigende Aussage ein und erhalten

$$\begin{aligned} [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C) &\Leftrightarrow [\neg((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \vee (A \Rightarrow C)] \\ &\Leftrightarrow [\neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)) \vee (\neg A \vee C)] \\ &\Leftrightarrow [\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee C) \vee \neg A \vee C] \\ &\Leftrightarrow [(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg C) \vee \neg A \vee C] \\ &\Leftrightarrow [(\neg A \vee (A \wedge \neg B)) \vee (C \vee (B \wedge \neg C))] \\ &\Leftrightarrow [((\neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \vee ((C \vee B) \wedge (C \vee \neg C))] \\ &\Leftrightarrow [(wahr \wedge (\neg A \vee \neg B)) \vee ((C \vee B) \wedge wahr)] \\ &\Leftrightarrow [\neg A \vee \neg B \vee C \vee B] \\ &\Leftrightarrow [\neg A \vee C \vee (\neg B \vee B)] \\ &\Leftrightarrow [\neg A \vee C \vee wahr] \\ &\Leftrightarrow wahr \end{aligned}$$

□

Aufgabe 3:

Wir führen einen Zirkelschluss:

- $(i) \Rightarrow (ii)$: Laut Vorlesung ist immer $M_1 \cap M_2 \subseteq M_1$. Also ist nur $M_1 \subseteq M_1 \cap M_2$ zu zeigen. Sei dazu $x \in M_1$ beliebig. Nach (i) ist auch $x \in M_2$. Also ist $x \in M_1 \cap M_2$.
- $(ii) \Rightarrow (iii)$: Laut Vorlesung ist immer $M_2 \subseteq M_1 \cup M_2$. Also ist nur $M_1 \cup M_2 \subseteq M_2$ zu zeigen. Sei dazu $x \in M_1 \cup M_2$ beliebig. Also ist bereits $x \in M_2$ oder $x \in M_1$. Nach (ii) ist $M_1 = M_1 \cap M_2$, also ist auch im zweiten Fall $x \in M_2$.
- $(iii) \Rightarrow (i)$: Laut Vorlesung ist immer $M_1 \subseteq M_1 \cup M_2$. Nach (iii) ist $M_1 \cup M_2 = M_2$ und somit in der Tat $M_1 \subseteq M_2$.

□

Aufgabe 4:

Sei $x \in M_1 \cap M_3$. Insbesondere $x \in M_1$. Wegen $M_1 \subseteq M_1 \cup M_3 \subseteq M_2$ folgt $x \in M_2$. Also $x \in M_1 \cap M_2 \subseteq M_3^c$, d.h. $x \notin M_3$. Insbesondere $x \notin M_1 \cap M_3$. Dies ist ein Widerspruch. Also kann die Menge $M_1 \cap M_3$ keine Elemente enthalten — sie ist die leere Menge.

□

Aufgabe 5:

(i) Für jedes $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(M_1 \cap M_2) &\Leftrightarrow f(x) \in M_1 \cap M_2 \\ &\Leftrightarrow f(x) \in M_1 \wedge f(x) \in M_2 \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(M_1) \wedge x \in f^{-1}(M_2) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(M_1) \cap f^{-1}(M_2) \end{aligned}$$

und somit in der Tat $f^{-1}(M_1 \cap M_2) = f^{-1}(M_1) \cap f^{-1}(M_2)$.

(ii) Für jedes $y \in Y$ gilt

$$\begin{aligned} y \in f(M_3 \cap M_4) &\Leftrightarrow \exists x \in M_3 \cap M_4 : f(x) = y \\ &\Rightarrow \exists x_1 \in M_3 : f(x_1) = y \wedge \exists x_2 \in M_4 : f(x_2) = y \\ &\Leftrightarrow y \in f(M_3) \wedge y \in f(M_4) \\ &\Leftrightarrow y \in f(M_3) \cap f(M_4) \end{aligned}$$

und somit in der Tat $f(M_3 \cap M_4) \subseteq f(M_3) \cap f(M_4)$.

Für das geforderte Gegenbeispiel betrachte man $X := Y := \mathbb{R}$, $x \xrightarrow{f} x^2$, $M_3 := \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ und $M_4 := \mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$. Es gilt $M_3 \cap M_4 = \emptyset$, also $f(M_3 \cap M_4) = \emptyset$. Aber $f(M_3) = f(M_4) = \mathbb{R}^+$ und folglich $f(M_3) \cap f(M_4) = \mathbb{R}^+ \neq \emptyset$.

(iii) Für jedes $y \in Y$ gilt

$$\begin{aligned}
 y \in f(M_3 \cup M_4) &\Leftrightarrow \exists x \in M_3 \cup M_4 : f(x) = y \\
 &\Leftrightarrow \exists x_1 \in M_3 : f(x_1) = y \vee \exists x_2 \in M_4 : f(x_2) = y \\
 &\Leftrightarrow y \in f(M_3) \vee y \in f(M_4) \\
 &\Leftrightarrow y \in f(M_3) \cup f(M_4)
 \end{aligned}$$

und somit in der Tat $f(M_3 \cup M_4) = f(M_3) \cup f(M_4)$.

□

Aufgabe 6:

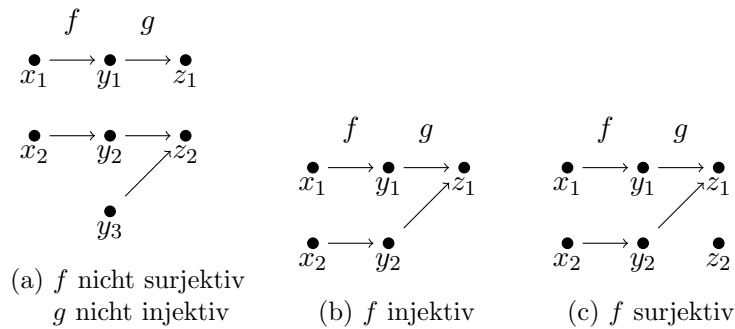


Abbildung 1: Gegenbeispiele

(i) Die Aussage ist wahr, denn: Seien $x, y \in X$ beliebig. Zu zeigen ist $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \Rightarrow x = y$. Es gilt in der Tat

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) &\Leftrightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \\
 &\stackrel{g \text{ injektiv}}{\Rightarrow} f(x) = f(y) \\
 &\stackrel{f \text{ injektiv}}{\Rightarrow} x = y.
 \end{aligned}$$

(ii) Die Aussage ist falsch. Siehe Abbildung 1a: g ist nicht injektiv, denn $g(y_2) = g(y_3) = z_2$.

(iii) Die Aussage ist wahr, denn: Sei $z \in Z$ beliebig. Zu zeigen ist $\exists x \in X : (g \circ f)(x) = z$. Da g surjektiv ist, existiert ein $y \in Y$ mit $g(y) = z$. Da f surjektiv ist, existiert ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Für dieses x gilt in der Tat $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$.

(iv) Die Aussage ist falsch. Siehe Abbildung 1a: f ist nicht surjektiv, denn $y_3 \notin f(X)$.

(v) Die Aussage ist wahr, denn: Sei $z \in Z$ beliebig. Zu zeigen ist $\exists y \in Y : g(y) = z$. Da $(g \circ f)$ surjektiv ist, existiert ein $x \in X$ mit $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = z$. Mit der Wahl $y = f(x) \in Y$ gilt tatsächlich $g(y) = z$.

(vi) Die Aussage ist wahr, denn: Nach (i) ist $(g \circ f)$ injektiv. Nach (iii) ist $(g \circ f)$ surjektiv. Also ist $(g \circ f)$ bijektiv.

(vii) Die Aussage ist wahr, denn: Sei $y \in Y$ beliebig. Zu zeigen ist $\exists x \in X : f(x) = y$. Betrachte dazu $g(y) \in Z$. Da $(g \circ f)$ surjektiv ist, existiert ein $x \in X$ mit $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y)$. Da g injektiv ist, muss aber $f(x) = y$ gelten.

(viii) Die Aussage ist falsch: Siehe Abbildung 1b: f ist injektiv.

(ix) Die Aussage ist falsch: Siehe Abbildung 1c: f ist surjektiv.

□