Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

WS2020/21
11.11.2022

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 7:

(a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt (quadratische Ergänzung)

$$x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}. \tag{1}$$

Also ist A nach unten durch $\frac{7}{4}$ beschränkt. Einsetzen von $x = \frac{1}{2}$ in (1) zeigt $\frac{7}{4} \in A$. Also ist $\min(A) = \inf(A) = \frac{7}{4}$.

Wir zeigen, dass $\sup(A)$ und $\max(A)$ nicht existieren, da A nicht nach oben beschränkt ist. Sei dazu $\gamma \in \mathbb{R}$ beliebig. Setze $x := \max\{\gamma, 2\}$. Dann gilt

$$A \ni a := x^2 - x + 2 > x^2 - x = x \underbrace{(x-1)}_{\geq 1} \geq x \geq \gamma.$$

Also kann tatsächlich kein $\gamma \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke von A sein.

(b) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt (quadratische Ergänzung)

$$n + \frac{1}{n} = \left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + 2 \geq 2. \tag{2}$$

Also ist B nach unten durch 2 beschränkt. Einsetzen von $n = 1$ in (2) zeigt $2 \in B$. Also ist $\min(B) = \inf(B) = 2$.

Wir zeigen, dass $\sup(B)$ und $\max(B)$ nicht existieren, da B nicht nach oben beschränkt ist. Sei dazu $\gamma \in \mathbb{R}$ beliebig. Nach dem Satz aus Abschnitt 4.7 des Skriptes, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \gamma$. Dann gilt

$$B \ni b := n + \frac{1}{n} > n > \gamma.$$

Also kann tatsächlich kein $\gamma \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke von B sein.

□

Aufgabe 8:

(a) Für jedes $0 < x \leq 42$ gilt (quadratische Ergänzung)

$$x + \frac{1}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2 \geq 2. \tag{3}$$

Also ist A nach unten durch 2 beschränkt. Einsetzen von $0 < x = 1 \leq 42$ in (3) zeigt $2 \in A$. Also ist $\min(A) = \inf(A) = 2$.

Wir zeigen, dass $\sup(A)$ und $\max(A)$ nicht existieren, da A nicht nach oben beschränkt ist. Sei dazu $\gamma \in \mathbb{R}$ beliebig. Setze $x := \frac{1}{|\gamma|+1}$. Es ist $0 < x \leq 1$ und demnach gilt

$$A \ni a := x + \frac{1}{x} > \frac{1}{x} = 1 + |\gamma| > |\gamma| \geq \gamma.$$

Also kann tatsächlich kein $\gamma \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke von A sein.

(b) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$0 \leq \frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{\underbrace{1+x^2}_{>0}} < 1. \tag{4}$$

Also ist B nach unten durch 0 und nach oben durch 1 beschränkt. Einsetzen von $x = 0$ in (4) zeigt $0 \in B$. Also ist $\min(B) = \inf(B) = 0$.

Wir wollen $\sup(B) = 1$ zeigen und verwenden dafür Satz 4.6 (3) des Skriptes. Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig. Setze $x := \sqrt{\frac{|1-\varepsilon|}{\varepsilon}} + 1$. Es gilt tatsächlich

$$\begin{aligned}
& \tfrac{x^2}{1+x^2} > 1 - \varepsilon \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 > (1-\varepsilon)(1+x^2) = (1-\varepsilon) + x^2(1-\varepsilon) \\
\Leftrightarrow \quad & x^2(1-(1-\varepsilon)) > (1-\varepsilon) \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 = \left(\sqrt{\tfrac{|1-\varepsilon|}{\varepsilon}} + 1\right)^2 > \tfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \\
\Leftrightarrow \quad & \text{wahr.}
\end{aligned}$$

Also ist $\sup(B) = 1$. Da nach (4) $1 \notin B$, existiert $\max(B)$ nicht.

□

Aufgabe 9:

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt: $|2x - 10| = 2\,|x-5|$. Betrachte die Fallunterscheidung:

- $x \geq 5$: Es gilt dann $|x-5| = x-5$ und damit
$$|2x-10| = 2\,|x-5| = 2(x-5) \leq x \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 10.$$

- $x < 5$: Es gilt dann $|x-5| = 5-x$ und damit
$$|2x-10| = 2\,|x-5| = 2(5-x) \leq x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{10}{3} \leq x.$$

Insgesamt ist also das Intervall $M = [\frac{10}{3}, 5) \cup [5, 10] = [\frac{10}{3}, 10]$ die Lösungsmenge.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt $|x-2| \cdot |x+2| = \left|x^2 - 4\right|$ und damit $|x-2| \cdot |x+2| = 2 \Leftrightarrow x^2 - 4 \in \{-2, 2\}$. Ferner gilt

$$x^2 - 4 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 6 \Leftrightarrow x \in \left\{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right\},$$

sowie

$$x^2 - 4 = -2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x \in \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}.$$

Damit ist die Lösungsmenge $M = \{-\sqrt{6}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{6}\}$.

(c) Da Beträge nicht-negativ sind, gilt

$$\begin{aligned} |x+2| > |x-3| \quad &\Leftrightarrow \quad (x+2)^2 > (x-3)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + 4x + 4 > x^2 - 6x + 9 \\ &\Leftrightarrow \quad 10x > 5 \\ &\Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist $M = (\frac{1}{2}, \infty)$ die Lösungsmenge.

(d) Sei $x \in \mathbb{R}$. Definiere $y := |2 - x|$. Es gilt

$$|2 - |2 - x|| = |2 - y| = 2 \Leftrightarrow 2 - y \in \{-2, 2\},$$

also $y = 0$ oder $y = 4$. Ist $y = |2 - x| = 0$, so ist $x = 2$. Ist $y = |2 - x| = 4$, so ist $2 - x \in \{4, -4\}$, also $x \in \{-2, 6\}$. Damit lautet die Lösungsmenge $M = \{-2, 2, 6\}$.

□

Aufgabe 10:

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt $|4 - 3x| = 3\left|\frac{4}{3} - x\right|$. Betrachte die Fallunterscheidung:

- $x \geq \frac{4}{3}$: Es gilt dann $\left|\frac{4}{3} - x\right| = x - \frac{4}{3}$ und damit

$$|4 - 3x| = 3\left|\frac{4}{3} - x\right| > 2x + 10 \Leftrightarrow 3\left(x - \frac{4}{3}\right) > 2x + 10 \Leftrightarrow x > 14.$$

- $x < \frac{4}{3}$: Es gilt dann $\left|\frac{4}{3} - x\right| = \frac{4}{3} - x$ und damit

$$|4 - 3x| = 3\left|\frac{4}{3} - x\right| > 2x + 10 \Leftrightarrow 3\left(\frac{4}{3} - x\right) > 2x + 10 \Leftrightarrow -\frac{6}{5} > x.$$

Da $\frac{4}{3} < 14$ und $-\frac{6}{5} < \frac{4}{3}$, ist die Lösungsmenge $M = (-\infty, -\frac{6}{5}) \cup (14, \infty)$.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\left|x^2 - 4\right| \leq x + 2 \Rightarrow x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2.$$

Ferner ist offenbar $-2 \in M$. Sei also im Weiteren $x > -2$. Dann gilt

$$\left|x^2 - 4\right| = |x - 2|\,|x + 2| = |x - 2|\,(x + 2) \leq x + 2 \Leftrightarrow |x - 2| \leq 1,$$

also $x \in [1, 3]$. Damit ist die Lösungsmenge $M = \{-2\} \cup [1, 3]$.

(c) Sei $x \in \mathbb{R}$. Da Beträge nicht-negativ sind, gilt

$$\begin{aligned} |x-4| = |x+1| \quad &\Leftrightarrow \quad (x-4)^2 = (x+1)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 8x + 16 = x^2 + 2x + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 15 = 10x \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Also ist die Lösungsmenge $M = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

(d) Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$||x+1| - 2| \le x \Rightarrow x \le 0.$$

Sei also im Weiteren $x \ge 0$. Dann gilt

$$||x+1| - 2| = |x+1-2| = |x-1| \le x = |x|\,.$$

Da Beträge nicht-negativ sind, gilt

$$|x-1| \le |x| \Leftrightarrow (x-1)^2 \le x^2 \Leftrightarrow 1 \le 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le x.$$

Wegen $0 < \frac{1}{2}$, ist die Lösungsmenge $M = [\frac{1}{2}, \infty)$.

□

Aufgabe 11: [Vollständige Induktion **T**]

(a) Für $n = 1$ ist die Aussage trivial, denn $2^1 > 1$. Wir führen nun eine Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge 2$ durch. (Beachte, dass wir $n = 1$ separat zur übrigen Induktion behandeln liegt daran, dass wir im Induktionsschritt den Schritt von $n = 1$ nach $n = 2$ nicht zeigen.)

Induktionsanfang (IA):
Für $n = 2$ gilt $2^2 > 2$.

- *Induktionsschluss (IS):*
  Wir nehmen an, dass die *Induktionsvoraussetzung (IV)*

  $$2^n > n$$

  für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge 2$ gelte. Wir zeigen die Aussage jetzt für $n+1$. Es ist

  $$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n > n+1$$

  wobei die erste Ungleichung nach *(IV)* gilt und die zweite ungleichung leicht zu überprüfen ist. Es ist $2n > n+1 \Leftrightarrow 2 > 1 + \frac{1}{n} \Leftrightarrow n > 1$. Da $n \ge 2$ gilt, folgt also die Behauptung.

(b)
- *Induktionsanfang (IA):*
  Für $n = 1$ ist $(1+x)^0 = 1 \ge 1 + 0 \cdot x$.

- *Induktionsschluss (IS):*
  Wir nehmen an, dass die *Induktionsvoraussetzung (IV)*

  $$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \text{für } x \geq -1$$

  für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ gelte. Wir zeigen die Aussage jetzt für $n+1$. Es ist,

  $$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+nx+x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

  wobei die erste Ungleichung nach *(IV)* (und da $(1+x) > 0$) gilt und die zweite ungleichung trivial ist.

Aufgabe 12:

(a)
- *Induktionsanfang (IA):*
  Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = 1 = (n+1)! - 1$.

- *Induktionsschluss (IS):*
  Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die *Induktionsvoraussetzung (IV)*

  $$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

  Dann gilt für $n+1$

  $$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! &= (n+1) \cdot (n+1)! + \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! \\ &\overset{\text{(IV)}}{=} (n+1) \cdot (n+1)! + (n+1)! - 1 \\ &= (n+1)! \cdot (n+2) - 1 = (n+2)! - 1. \end{aligned}$$

Die Aussage lässt sich wie folgt direkt zeigen. Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! &= \sum_{k=1}^{n} (k+1-1) \cdot k! = \sum_{k=1}^{n} [(k+1)k! - k!] = \sum_{k=1}^{n} (k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k! \\ &\overset{\text{Indexshift}}{=} \sum_{k=2}^{n+2} k! - \sum_{k=1}^{n} k! \underset{\text{summe}}{\overset{\text{Teleskop-}}{=}} (n+1)! - 1. \end{aligned}$$

(b)
- *Induktionsanfang (IA):*
  Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 = 1 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}$.

- *Induktionsschluss (IS):*
  Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die *Induktionsvoraussetzung (IV)*

  $$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dann gilt für $n+1$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}k^2 &= (-1)^{n+2}(n+1)^2+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2\\ &\overset{\text{(IV)}}{=} (-1)^{n+2}(n+1)^2+(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}\\ &= (-1)^{n+2}(n+1)\cdot\left((n+1)-\frac{n}{2}\right)\\ &= (-1)^{n+2}(n+1)\frac{n+2}{2}.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 13:

(a)

- *Induktionsanfang (IA):*
  Für $n=1$ gilt $\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = 1 = \frac{n^n}{n!}$.

- *Induktionsschluss (IS):*
  Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die *Induktionsvoraussetzung (IV)*

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!}.$$

Dann gilt für $n+1$

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{(n+1)-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \overset{\text{(IV)}}{=} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{n^n}{n!}\\ &= \frac{(n+1)^n}{n^n}\cdot\frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)^n}{n!}\cdot\frac{n+1}{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

(b)

- *Induktionsanfang (IA):*
  Für $n=1$ gilt $\sum_{k=1}^{n}k^2 = 1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- *Induktionsschluss (IS):*
  Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die *Induktionsvoraussetzung (IV)*

$$\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Dann gilt für $n+1$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}k^2 &= (n+1)^2+\sum_{k=1}^{n}k^2 \overset{\text{(IV)}}{=} (n+1)^2+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= (n+1)\cdot\frac{6(n+1)+n(2n+1)}{6} = (n+1)\cdot\frac{6n+6+2n^2+n}{6}\\ &= (n+1)\cdot\frac{2n^2+7n+6}{6} = (n+1)\cdot\frac{(n+2)(2n+3)}{6}.\end{aligned}$$

Die Aussage lässt sich wie folgt direkt zeigen. Nach dem Hinweis gilt (Teleskopsumme)

$$\begin{aligned} n^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} (k-1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} (k^3 - 3k^2 + 3k - 1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (3k^2 - 3k + 1) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + n \end{aligned}$$

Nach Beispiel (2) des Abschnittes 4.8 des Skriptes gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Einsetzen und Auflösen nach $\sum_{k=1}^{n} k^2$ liefert die gesuchte Formel

$$\begin{aligned} n^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{3n(n+1)}{2} + n \quad &\Leftrightarrow \quad n(n+1)(n-1) + \frac{3n(n+1)}{2} = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

□