Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 20:

- $\Rightarrow$: Sei (a_n) konvergent gegen $a \in \mathbb{C}$. Zu zeigen ist, dass $a_{2n} \to a$ und $a_{2n+1} \to a$ für $n \to \infty$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Da $a_n \to a$, existiert ein $n_0(\varepsilon)$ so, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$. Wegen $2k+1 > 2k > k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, gilt erst recht $|a_{2n} - a| < \varepsilon$ und $|a_{2n+1} - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$. Dies beweist die Konvergenz von (a_{2n}) und (a_{2n+1}) gegen a.

- $\Leftarrow$: Seien (a_{2n}) und (a_{2n+1}) konvergent gegen ein $a \in \mathbb{C}$. Zu zeigen ist, dass (a_n) gegen a konvergiert. Sei dazu ein $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Da $a_{2n+1} \to a$ und $a_{2n} \to a$, existieren $n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ derart, dass

  $$|a_{2n+1} - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_1(\varepsilon) \qquad \text{und} \qquad |a_{2n} - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_2(\varepsilon).$$

  Definiere $n_0(\varepsilon) := 2 \cdot \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\} + 1$. Für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$, denn: Ist $n > n_0(\varepsilon)$ ungerade, also $n = 2k+1$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$, so gilt

  $$n = 2k+1 \geq n_0(\varepsilon) = 2 \cdot \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\} + 1 \Rightarrow k \geq n_1(\varepsilon).$$

  Ist n gerade, also $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so gilt

  $$n = 2k \geq n_0(\varepsilon) = 2 \cdot \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\} + 1 \geq 2 \cdot \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\} \geq 2n_2(\varepsilon) \Rightarrow k \geq n_2(\varepsilon).$$

  In beiden Fällen gilt nach Voraussetzung $|a_n - a| < \varepsilon$.

$\square$

Aufgabe 21:

Nach Bemerkung (c) im Abschnitt 6.2 des Skriptes, ist eine komplexe Folge (z_n) genau dann gegen ein $z_0 \in \mathbb{C}$ konvergent, wenn $\mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(z_0)$ und $\mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(z_0)$. Seien $a_n \to a \in \mathbb{C}$ und $b_n \to b \in \mathbb{C}$. Nach Obigem gilt $\mathrm{Re}(a_n) \to \mathrm{Re}(a)$, $\mathrm{Im}(a_n) \to \mathrm{Im}(a)$, $\mathrm{Re}(b_n) \to \mathrm{Re}(b)$ und $\mathrm{Im}(b_n) \to \mathrm{Im}(b)$.

(i) Nach den Grenzwertsätzen (5) aus Abschnitt 6.3 des Skriptes gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(a_n b_n) &= \mathrm{Re}(a_n)\,\mathrm{Re}(b_n) - \mathrm{Im}(a_n)\,\mathrm{Im}(b_n) &\to\quad& \mathrm{Re}(a)\,\mathrm{Re}(b) - \mathrm{Im}(a)\,\mathrm{Im}(b) = \mathrm{Re}(ab), \\ \mathrm{Im}(a_n b_n) &= \mathrm{Re}(a_n)\,\mathrm{Im}(b_n) + \mathrm{Im}(a_n)\,\mathrm{Re}(b_n) &\to\quad& \mathrm{Re}(a)\,\mathrm{Im}(b) + \mathrm{Im}(a)\,\mathrm{Re}(b) = \mathrm{Im}(ab). \end{aligned}$$

Nach Obigem also tatsächlich $a_n b_n \to ab$.

(ii) Da $b \neq 0$, ist $\mathrm{Re}(b) \neq 0$ oder $\mathrm{Im}(b) \neq 0$. Da $\mathrm{Re}(b_n) \to \mathrm{Re}(b)$ und $\mathrm{Im}(b_n) \to \mathrm{Im}(b)$, ist nach den Grenzwertsätzen (5) aus Abschnitt 6.3 des Skriptes also $\mathrm{Re}(b_n) \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ oder $\mathrm{Im}(b_n) \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Da $z = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, ist also tatsächlich $b_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Also gilt $\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n \overline{b_n}}{|b_n|^2} = \frac{1}{|b_n|^2} a_n \overline{b_n}$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

Nach Obigem ist
$$\overline{b_n} = \mathrm{Re}(b_n) - \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(b_n) \to \mathrm{Re}(b) - \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(b) = \overline{b}$$
und nach den Grenzwertsätzen (5) aus Abschnitt 6.3 des Skriptes
$$|b_n|^2 = \mathrm{Re}(b_n)^2 + \mathrm{Im}(b_n)^2 \to \mathrm{Re}(b)^2 + \mathrm{Im}(b)^2 = |b|^2 .$$

Mit Aufgabenteil (ii) folgt
$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{|b_n|^2}(a_n \overline{b_n}) \to \frac{1}{|b|^2} a\overline{b} = \frac{a}{b}.$$

□

Aufgabe 22:

(i) Es folgt mit Mitteln der Vorlesung (Kapitel 6 des Skriptes)
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+3n-4}{1+n^2+5n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{6}{n}+\frac{3}{n^2}-\frac{4}{n^3}}{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n}+5} = 0.$$

(ii) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$
$$b_n = \sqrt[n]{2^n+3^n} \geq \sqrt[n]{3^n} = 3,$$
sowie
$$b_n = \sqrt[n]{2^n+3^n} = 3\sqrt[n]{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n} \leq 3\sqrt[n]{2}.$$
Wegen $\sqrt[n]{2} \to 1$ (Beispiel 6.5 (2) der Vorlesung), gilt nach dem Sandwichtheorem ((3) in Abschnitt 6.3 des Skriptes) $\lim_{n\to\infty} b_n = 3$.

(iii) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$
$$\begin{aligned} c_n = \sqrt{9n^2+2n+1} - 3n &= \left(\sqrt{9n^2+2n+1} - 3n\right) \cdot \frac{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n} \\ &= \frac{2n+1}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n} = \frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{9+\frac{2}{n}+\frac{1}{n}}+3}. \end{aligned}$$

Mit den Mitteln der Vorlesung (Kapitel 6 des Skriptes) und dieser Darstellung folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3}$.

(iv) Es gilt nach Beispiel (2) im Abschnitt 4.8 des Skriptes

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n^2} k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \frac{n^2(n^2+1)}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

(v) Für jedes $n \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned} e_n &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{1-n} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \end{aligned}$$

Der Zähler konvergiert mit Mitteln der Vorlesung gegen 1. Der Nenner konvergiert nach Abschnitt 6.6 des Skriptes gegen die Eulersche Zahl. Also gilt $\lim_{n\to\infty} e_n = \frac{1}{e}$.

(vi) Konvergente Folgen sind beschränkt (Bemerkung (b) im Abschnitt 6.2 des Skriptes). Wir zeigen, dass (f_n) unbeschränkt ist und damit nicht konvergent sein kann. Sei dazu $k \in \mathbb{N}$. Es ist

$$(2k)! = \underbrace{2k \cdot (2k-1) \cdot \ldots \cdot (k+1)}_{k \text{ Faktoren, jeder } \geq k} \cdot \underbrace{k \cdot \ldots \cdot 1}_{\geq 1} \geq k^k.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt damit

$$f_{2n^2} = \sqrt[2n^2]{(2n^2)!} \geq \sqrt[2n^2]{(n^2)^{n^2}} = \sqrt[2n^2]{n^{2n^2}} = n.$$

Da die natürlichen Zahlen nicht nach oben beschränkt sind (Satz (2) im Abschnitt 4.7 des Skriptes), ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der Tat nicht nach oben beschränkt.

□

Aufgabe 23:

(i) Es folgt mit Mitteln der Vorlesung (Kapitel 6 des Skriptes)

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-1}{n+3} - \frac{n^3+1}{n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2-1)(n^2+1) - (n^3+1)(n+3)}{(n^2+1)(n+3)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 - 1 - (n^4 + 3n^3 + n + 3)}{(n^2+1)(n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-3n^3 - n - 4}{(n^2+1)(n+3)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{-3 - \frac{1}{n^2} - \frac{4}{n^3}}{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{3}{n}\right)} = -3. \end{aligned}$$

(ii) Nach dem Binomialsatz aus Abschnitt 4.11 des Skriptes gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} b_n &= \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{3^{n+k}}} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{3^k} 1^{n-k}} \\ &= \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\left(1 + \frac{1}{3}\right)^n} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{4}{9}\right)^n}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\frac{1}{2} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{4}{9}\right)^n}}_{=b_n} \leq \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{4}{8}\right)^n} = \frac{1}{2}\sqrt[n]{2}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Wegen $\sqrt[n]{2} \to 1$ (Beispiel 6.5 (2) der Vorlesung), gilt nach dem Sandwichtheorem ((3) in Abschnitt 6.3 des Skriptes) $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$.

(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
\sqrt{4n^2+8064n+2016} - 2n &= \left(\sqrt{4n^2+8064n+2016} - 2n\right) \\
&\quad \cdot \frac{\sqrt{4n^2+8064n+2016}+2n}{\sqrt{4n^2+8064n+2016}+2n} \\
&\overset{\text{3. Binom.}}{=} \frac{4n^2+8064n+2016-4n^2}{\sqrt{4n^2+8064n+2016}+2n} \\
&= \frac{8064n+2016}{\sqrt{4n^2+8064n+2016}+2n} \\
&= \frac{8064+\frac{2016}{n}}{2\left(\sqrt{1+\frac{8064}{4n}+\frac{2016}{4n^2}}+1\right)} \\
&= \frac{8064+\frac{2016}{n}}{2\left(\sqrt{1+\frac{8064}{4n}+\frac{2016}{4n^2}}+1\right)}
\end{aligned}$$

Mit den Mitteln der Vorlesung (Kapitel 6 des Skriptes) und dieser Darstellung folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{4n^2+8064n+2016} - 2n = \lim_{n\to\infty} \frac{8064+\frac{2016}{n}}{2\left(\sqrt{1+\frac{8064}{4n}+\frac{2016}{4n^2}}+1\right)} = \frac{8064}{2\cdot 2} = 2016.$$

(iv) Betrachte die Teilfolgen $(d_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, sowie $(d_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$. Es gilt $\left|\frac{3+4\mathrm{i}}{15}\right| = \frac{\sqrt{9+16}}{15} = \frac{\sqrt{25}}{15} = \frac{1}{3}$ und damit (Kapitel 6 des Skriptes) $\lim_{k\to\infty} \left(\frac{3+4\mathrm{i}}{15}\right)^{2k} = 0$. Hieraus folgt

$$\lim_{k\to\infty} d_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} + \left(\frac{3+4\mathrm{i}}{15}\right)^{2k} = \frac{1}{2}.$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} d_{2k+1} &= \lim_{k\to\infty} \sqrt{(2k+1)+\sqrt{2k+1}} - \sqrt{2k+1} \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\sqrt{(2k+1)+\sqrt{2k+1}} - \sqrt{2k+1}\right) \cdot \frac{\sqrt{(2k+1)+\sqrt{2k+1}}+\sqrt{2k+1}}{\sqrt{(2k+1)+\sqrt{2k+1}}+\sqrt{2k+1}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{(2k+1)+\sqrt{2k+1}}+\sqrt{2k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2k+1}}}+1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Nach Aufgabe 19 folgt, dass $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\frac{1}{2}$ konvergiert.

(v) Nach Abschnitt 6.6 des Skriptes konvergiert $(\tilde{e}_n) := \left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)$ gegen die Eulersche Zahl. Insbesondere ist $(\tilde{e}_n)$ beschränkt, etwa $\tilde{e}_n \leq 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$1 \leq e_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \leq \sqrt[n]{4}$$

Wegen $\sqrt[n]{4} \to 1$ (Beispiel 6.5 (2) der Vorlesung), gilt nach dem Sandwichtheorem ((3) in Abschnitt 6.3 des Skriptes) $\lim_{n\to\infty} e_n = 1$.

(vi) Wir unterscheiden die folgenden drei Fälle und benutzen jeweils die Ergebnisse des Kapitels 6 des Skriptes.

- Ist $a > 1$, so gilt $\frac{1}{a} < 1$ und damit $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{2n} = 0$. Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-a^{-2n}}{1+a^{-2n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1 - \left(\frac{1}{a}\right)^{2n}}{\lim_{n\to\infty} 1 + \left(\frac{1}{a}\right)^{2n}} = 1.$$

- Ist $a = 1$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} = \frac{0}{2} = 0$$

und damit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

- Ist $a < 0$, so gilt $\lim_{n\to\infty} a^{2n} = 0$. Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{2n}-1}{a^{2n}+1} = \frac{\lim_{n\to\infty} a^{2n} - 1}{\lim_{n\to\infty} a^{2n} + 1} = -1.$$

$\square$

Aufgabe 24:

Angenommen, (a_n) ist konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$. Induktiv sieht man ein, dass $a_n \geq \sqrt{2} \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach (3) im Satz aus dem Abschnitt 6.3 des Skriptes gilt also $a \geq 0$. Ferner gilt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} 2 + a_n} = \sqrt{2 + \lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{2+a}.$$

Auflösen nach a liefert

$$a^2 = |2+a| \overset{a\geq 0}{\Leftrightarrow} a^2 = 2 + a \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow a \in \left\{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}+2}, \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+2}\right\} = \{-1, 2\}.$$

Wegen $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist $a = 2$ der einzige Kandidat für den Grenzwert. Wegen $a_1 = \sqrt{2} < 2$ liegt die Vermutung nahe, dass (a_n) monoton wachsend ist. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
& a_{n+1} - a_n = \sqrt{2+a_n} - a_n = \frac{2 + a_n - a_n^2}{\sqrt{2+a_n} + a_n} \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & a_n^2 - a_n - 2 = \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 - 2 - \frac{1}{4} \leq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4} \\
\overset{a_n \geq \sqrt{2} > \frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} \quad & a_n \leq \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2.
\end{aligned}$$

Also ist (a_n) monoton wachsend, falls $a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die letzte Aussage beweisen wir durch vollständige Induktion über n.

- *IA* $(n = 1)$: In der Tat ist $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$.
- *IS* $(n \rightsquigarrow n+1)$: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die *IV* $a_n \leq 2$. Dann gilt für $n+1$ tatsächlich $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \overset{\text{(IV)}}{\leq} \sqrt{2+2} = 2$.

Also ist (a_n) nach oben beschränkt und monoton wachsend. Nach dem Satz aus Abschnitt 6.4 des Skriptes ist (a_n) konvergent. Nach Obigem ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$. $\square$

Aufgabe 25:

Angenommen, (a_n) ist konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$. Induktiv sieht man ein, dass $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach (3) im Satz aus dem Abschnitt 6.3 des Skriptes gilt also $a \geq 0$. Ferner gilt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+4a_n}{4+3a_n} = \frac{2+4a}{4+3a}.$$

Auflösen nach a liefert

$$4a + 3a^2 = 2 + 4a \Leftrightarrow a^2 = \frac{2}{3} \overset{a\geq 0}{\Leftrightarrow} a = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Also ist $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$ der einzige Kandidat für den Grenzwert. Wegen $a_1 = 1 > a$, liegt die Vermutung nahe, dass (a_n) monoton fallend ist. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2+4a_n}{4+3a_n} - a_n \leq 0 \overset{a_n\geq 0}{\Leftrightarrow} 2 + 4a_n \leq 4a_n + 3a_n^2 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq a_n^2 \overset{a_n\geq 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{\frac{2}{3}} \leq a_n.$$

Also ist (a_n) monoton fallend, falls $a_n \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die letzte Aussage beweisen wir durch vollständige Induktion über n.

- *IA* $(n = 1)$: In der Tat ist $a_1 = 1 \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$.
- *IS* $(n \rightsquigarrow n+1)$: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die *IV* $a_n \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$. Dann gilt für $n+1$ tatsächlich

$$\begin{aligned} a_{n+1} \geq \sqrt{\frac{2}{3}} &\overset{a_{n+1}\geq 0}{\Leftrightarrow} a_{n+1}^2 = \left(\frac{2+4a_n}{4+3a_n}\right)^2 \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3(2+4a_n)^2 \geq 2(4+3a_n)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 12 + 48a_n + 48a_n^2 \geq 32 + 48a_n + 18a_n^2 \Leftrightarrow 30a_n^2 \geq 20 \overset{a_n\geq 0}{\Leftrightarrow} a_n \geq \sqrt{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \text{(IV)}. \end{aligned}$$

Also ist (a_n) nach unten beschränkt und monoton fallend. Nach dem Satz aus Abschnitt 6.4 des Skriptes ist (a_n) konvergent. Nach Obigem ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{\frac{2}{3}}$. $\square$