

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

5. Übungsblatt

Aufgabe 26:

Die Folge (a_n) sei durch

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für gerade } n, \\ \frac{1}{2^n} & \text{für ungerade } n, \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert.

- (a) Zeigen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- (b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ divergent ist.
- (c) Warum ist das Leibniz-Kriterium hier nicht anwendbar?

Aufgabe 27: [Leibniz-Kriterium **T**]

Die Folge (a_n) sei durch $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert.

- (a) Zeigen Sie, dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- (b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ divergent ist.
- (c) Warum ist das Leibniz-Kriterium hier nicht anwendbar?

Aufgabe 28:

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Reihenwert.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{2^{n+k}}$.

Aufgabe 29: [Konvergenz von Reihen **T**]

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Reihenwert.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1-\frac{n}{e})e^{-n}}{n(n+1)},$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x)^n}{(1+2|x|)^{n-1}}$ mit $x \in \mathbb{R}.$

Aufgabe 30:

Untersuchen Sie die folgenden Reihen jeweils auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{2n}{n},$

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)},$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2},$

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1},$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - \sqrt[n]{a})$ mit $0 < a < 1,$

(vi) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2} \right].$

Aufgabe 31: [(absolute) Konvergenz von Reihen **T**]

Untersuchen Sie die folgenden Reihen jeweils auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}$ mit $x \in \mathbb{R},$

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(3n)^n n!},$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)^{n^2},$

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n}-2)^2}{n^2+\sqrt{n^4+1}},$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n},$

(vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n} - \frac{n+1}{\sqrt[n]{n+1}}}{n}.$



Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 26, 28 und 30 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.