

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

7. Übungsblatt

Aufgabe 39:

- (a) Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ Potenzreihen mit Konvergenzradien $R_1 > 0$ bzw. $R_2 > 0$. Zeigen Sie, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k) z^n$ Konvergenzradius $R \geq \min\{R_1, R_2\}$ hat und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right)$$

für $|z| < \min\{R_1, R_2\}$ gilt.

- (b) Berechnen Sie für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ den Konvergenzradius R der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^n$$

und geben Sie für $|z| < R$ den Reihenwert an.

Hinweis: Cauchyprodukt geometrischer Reihen, Aufgabe 13 (a).

Aufgabe 40: [Potenzreihen **T**]

Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen? Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz jeweils den Reihenwert.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$.

Aufgabe 41:

Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist der n -te *Dirichlet-Kern* D_n durch $D_n(z) = \sum_{k=-n}^n e^{ikz}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gegeben. Zeigen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $z \in D := \{z \in \mathbb{C} \mid \sin(z) \neq 0\}$ die Identitäten

$$D_n(2z) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kz) = \frac{\sin((2n+1)z)}{\sin(z)}.$$

Hinweis: Geometrische Summenformel.

Aufgabe 42: [Trigonometrische Funktionen **T**]

Sei $D := \{z \in \mathbb{C} \mid \cos(z) \neq 0\}$ und $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ für alle $z \in D$. Zeigen Sie

(i) $\sin(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)},$

(ii) $\cos(2x) = \frac{1 - \tan^2(x)}{1 + \tan^2(x)}$

für alle $x \in D \cap \mathbb{R}$.

Aufgabe 43:

Seien U_1, U_2 Untervektorräume eines $\mathbb{K}$ -Vektorraums W .

(a) Zeigen Sie, dass

$$U_1 \cap U_2 = \{v \in W \mid v \in U_1 \text{ und } v \in U_2\}$$

ein Untervektorraum von W ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel für U_1, U_2 und W so, dass $U_1 \cup U_2$ kein Untervektorraum ist. Wobei

$$U_1 \cup U_2 = \{v \in W \mid v \in U_1 \text{ oder } v \in U_2\}$$

(c) Zeigen Sie, falls $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum von W ist, dann ist $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.

Aufgabe 44: [Vektorräume **T**]

Welche der Mengen

(i) $\{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \mid f \text{ hat mindestens eine Nullstelle}\},$

(ii) $\{(a_n) \in c \mid \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a\}$ mit einem festen $a \in \mathbb{R},$

(iii) $\{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \mid f(0) = 0\}$

sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bzw. des $\mathbb{R}^{[-1,1]}$?

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 39, 41 und 43 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.