

## Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

### 7. Übungsblatt

#### Aufgabe 39:

- (a) Sei  $|z| < \min\{R_1, R_2\}$ . Nach (a) im Abschnitt 7.14 der Vorlesung konvergieren die Reihen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$  absolut. Ihr Cauchy-Produkt lautet

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{n-k} z^{n-k} b_k z^k = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k \right) z^n.$$

Nach Satz im Abschnitt 7.10 konvergiert es absolut und für den Reihenwert gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k \right) z^n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right).$$

Nach Folgerung (a) aus dem Abschnitt 7.14 des Skriptes gilt  $R \geq \min\{R_1, R_2\}$ .

- (b) Für  $k = 0$  ist  $\binom{n+k}{k} = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . Also liegt die geometrische Reihe vor. Für  $k = 1$  ist  $\binom{n+k}{k} = \binom{n+1}{1} = \frac{(n+1)!}{(n+1-1)!1!} = n+1$ . Nach Beispiel im Abschnitt 7.10 des Skriptes liegt also das Cauchyprodukt der geometrischen Reihe mit sich selbst vor. Es liegt die Vermutung nahe, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^n = \underbrace{\left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) \cdot_{\text{CP}} \dots \cdot_{\text{CP}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)}_{k+1 \text{ Faktoren}}$$

für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ , wobei  $\cdot_{\text{CP}}$  das Cauchyprodukt bezeichnet. Ein Beweis gelingt mit vollständiger Induktion.

- *IA* ( $k = 0$ ): klar.
- *IS* ( $k \rightsquigarrow k+1$ ): Für ein  $k \in \mathbb{N}_0$  gelte die *IH*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^n = \underbrace{\left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) \cdot_{\text{CP}} \dots \cdot_{\text{CP}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)}_{k+1 \text{ Faktoren}}.$$

Nach Teilaufgabe (a) gilt für  $k+1$

$$\begin{aligned} \underbrace{\left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) \cdot_{\text{CP}} \dots \cdot_{\text{CP}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) \cdot_{\text{CP}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)}_{k+1 \text{ Faktoren}} &\stackrel{(\text{IH})}{=} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^n \right) \cdot_{\text{CP}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^n \binom{m+k}{k} \cdot 1 \right) z^n \\ &\stackrel{\text{A 13 (a)}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} z^n. \end{aligned}$$

Nach Teilaufgabe (a) gilt  $R \geq 1$  und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^n = \underbrace{\left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) \cdot \dots \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)}_{k+1 \text{ Faktoren}} = \left( \frac{1}{1-z} \right)^{k+1}$$

für alle  $|z| < 1$ . Ferner gilt

$$\binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)!}{n!k!} = \frac{\prod_{j=1}^{n+k} j}{\left( \prod_{j=1}^n j \right) \left( \prod_{j=1}^k j \right)} = \frac{\prod_{j=n+1}^{n+k} j}{\prod_{j=1}^k j} = \prod_{j=1}^k \frac{n+j}{j} \geq 1$$

für alle  $n, k \in \mathbb{N}_0$ . Damit ist

$$\left| \binom{n+k}{k} z^n \right| \geq 1$$

für alle  $|z| \geq 1$  und  $n \in \mathbb{N}_0$ . Also ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^n$  divergent für alle  $|z| \geq 1$ . Nach Folgerung (b) aus dem Abschnitt 7.14 des Skriptes gilt  $R \leq 1$ . Insgesamt also  $R = 1$ .

□

### Aufgabe 40:

(i) Es gilt

$$\binom{n+1}{1} = \frac{(n+1)!}{(n+1-1)!1!} = n+1$$

für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . Mit dem Ergebnis der Aufgabe 37 (b) gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{1}{(1-z)} = \frac{z}{(1-z)^2}$$

für alle  $|z| < 1$ .

Da  $|n z^n| \geq n$  für alle  $|z| \geq 1$  und  $n \in \mathbb{N}_0$ , ist  $(n z^n)$  keine Nullfolge für  $|z| \geq 1$  und die Reihe ist divergent.

(ii) Es gilt

$$\binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)!}{(n+2-2)!2!} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} + 1$$

und somit  $n^2 = 2 \binom{n+2}{2} - 3n - 2$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . Mit dem Ergebnis der Aufgabe 37 (b) und der letzten Teilaufgabe gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} z^n - 3 \sum_{n=0}^{\infty} n z^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ &= \frac{2}{(1-z)^3} - \frac{3z}{(1-z)^2} - \frac{2}{(1-z)} = \frac{2 - 3z + 3z^2 - 2(1-z)^2}{(1-z)^3} \\ &= \frac{z + z^2}{(1-z)^3} = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3} \end{aligned}$$

für alle  $|z| < 1$ .

Da  $|n^2 z^n| \geq n$  für alle  $|z| \geq 1$  und  $n \in \mathbb{N}_0$ , ist  $(n^2 z^n)$  keine Nullfolge für  $|z| \geq 1$  und die Reihe ist divergent.

□

### Aufgabe 41:

Sei  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $z \in D$ . Wir zeigen die erste Identität. Nach (0) im Abschnitt 7.11 des Skriptes ist  $e^0 = 1$ . Also gilt

$$\begin{aligned} D_n(2z) &= \sum_{k=-n}^n e^{i2kz} = e^0 + \sum_{k=-n}^{-1} e^{i2kz} + \sum_{k=1}^n e^{i2kz} = 1 + \sum_{k=1}^n e^{-2ikz} + \sum_{k=1}^n e^{i2kz} \\ &= 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{e^{i2kz} + e^{-i2kz}}{2} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kz), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung die Definition des Cosinuses aus Abschnitt 7.12 des Skriptes ist.

Für die zweite Identität benötigen wir die *verallgemeinerte geometrische Summenformel*. Sei  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $m \in \mathbb{N}_0$ . Es gilt

$$\begin{aligned} w \sum_{k=-m}^m w^k &= \sum_{k=-m}^m w^{k+1} = \sum_{k=-m+1}^{m+1} w^k = w^{m+1} - w^{-m} + \sum_{k=-m}^m w^k \\ \Leftrightarrow (w-1) \sum_{k=-m}^m w^k &= w^{m+1} - w^{-m}. \end{aligned}$$

Ist also zusätzlich  $w \neq 1$ , so ist

$$\sum_{k=-m}^m w^k = \frac{w^{m+1} - w^{-m}}{w - 1}.$$

Nach (0) im Abschnitt 7.12 des Skriptes und der obigen Summenformel folgt

$$\begin{aligned} (e^{2iz} - 1)D_n(2z) &= (e^{2iz} - 1) \sum_{k=-n}^n e^{2ikz} = (e^{2iz} - 1) \sum_{k=-n}^n (e^{2iz})^k \\ &= (e^{2iz})^{n+1} - (e^{2iz})^{-n} = e^{2i(n+1)z} - e^{-2inz} \\ \cdot \left( \frac{e^{-iz}}{2i} \right) &\Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} D_n(2z) = \frac{e^{iz(2n+1)} - e^{-i(2n+1)z}}{2i} \\ \Leftrightarrow \sin(z) D_n(2z) &= \sin((2n+1)z) \\ \stackrel{z \in D}{\Leftrightarrow} D_n(2z) &= \frac{\sin((2n+1)z)}{\sin(z)}, \end{aligned}$$

wobei die vorletzte Äquivalenz die Definition des Sinuses aus Abschnitt 7.12 des Skriptes ist.

□

### Aufgabe 42:

(i) Für alle  $z \in D$  gilt

$$\frac{2 \tan(z)}{1 + \tan^2(z)} = \frac{2 \frac{\sin(z)}{\cos(z)}}{1 + \frac{\sin^2(z)}{\cos^2(z)}} = 2 \frac{\sin(z) \cos(z)}{\sin^2(z) + \cos^2(z)}.$$

Nach der Eulerformel aus (2) im Abschnitt 7.12 des Skriptes ist  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Nach dem Additionstheorem für sin aus (3) im gleichen Abschnitt, ist  $\sin(2z) = 2 \sin(z) \cos(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Insgesamt also tatsächlich  $\frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)} = \sin(2x)$  für alle  $x \in D \cap \mathbb{R}$ .

(ii) Für alle  $z \in D$  gilt

$$\frac{1 - \tan^2(z)}{1 + \tan^2(z)} = \frac{1 - \frac{\sin^2(z)}{\cos^2(z)}}{1 + \frac{\sin^2(z)}{\cos^2(z)}} = \frac{\cos^2(z) - \sin^2(z)}{\sin^2(z) + \cos^2(z)}.$$

Nach der Eulerformel aus (2) im Abschnitt 7.12 des Skriptes ist  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Nach dem Additionstheorem für cos aus (3) im gleichen Abschnitt, ist  $\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Insgesamt also tatsächlich  $\frac{1 - \tan^2(x)}{1 + \tan^2(x)} = \cos(2x)$  für alle  $x \in D \cap \mathbb{R}$ .

□

**Aufgabe 43:** Lösung handschriftlich im Mitschrieb zur Übung. PDF im Ordner Übung auf Ilias.

**Aufgabe 44:**

(i) Sei  $U := \{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} : f \text{ hat mindestens eine Nullstelle}\}$  und  $f, g \in \mathbb{R}^{[-1,1]}$  definiert durch

$$f(x) = 1 + x, \quad g(x) = -x$$

für alle  $x \in [-1, 1]$ . Wegen  $f(-1) = g(0) = 0$ , ist  $f, g \in U$ . Aber  $f + g \equiv 1$ , d.h. für alle  $x \in [-1, 1]$  gilt

$$(f + g)(x) = 1 \neq 0.$$

Also  $f + g \notin U$ . Nach dem Untervektorraumkriterium (Satz im Abschnitt 8.4 des Skriptes) ist  $U$  kein Untervektorraum von  $\mathbb{R}^{[-1,1]}$ .

(ii) Sei  $V := \{(a_n) \in c \mid \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a\}$ . Wir verwenden das Untervektorraumkriterium (Satz im Abschnitt 8.4 des Skriptes), um zu überprüfen, ob  $V$  ein Untervektorraum von  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  ist.

- $0 \in V$ : Wegen  $0 = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , ist  $0 \in V \Leftrightarrow a = 0$ . Sei also im Folgenden  $a = 0$ .
- Seien  $(a_n), (b_n) \in V$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Zu zeigen ist  $(a_n) + (b_n) \in V$  und  $\alpha(a_n) \in V$ . Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 + 0 = 0 = a$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha a_n = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \cdot 0 = 0 = a$$

ist in der Tat  $(a_n) + (b_n) \in V$  und  $\alpha(a_n) \in V$ .

Also ist  $V$  genau für  $a = 0$  ein Untervektorraum von  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

(iii) Sei  $W := \{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} : f(0) = 0\}$ . Wir verwenden das Untervektorraumkriterium (Satz im Abschnitt 8.4 des Skriptes), um zu überprüfen, ob  $W$  ein Untervektorraum von  $\mathbb{R}^{[-1,1]}$  ist.

- $0 \in W$ : Wegen  $0 = f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$  und damit  $f(0) = 0$ , ist  $0 \in W$ .
- Seien  $f, g \in W$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Zu zeigen ist  $f + g \in W$  und  $\alpha f \in W$ : Wegen

$$(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$$

und

$$(\alpha f)(0) = \alpha f(0) = \alpha \cdot 0 = 0$$

ist in der Tat  $f + g \in W$  und  $\alpha f \in W$ .