Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

WS2022/23
04.01.2023

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

8. Übungsblatt

Aufgabe 45:

(i) Sei $x \in \mathbb{R}$ fest. Für $x = 0$ ist $f_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und deshalb $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Ist $x \neq 0$, so gilt

$$|f_n(x)| = \left|\frac{nx^2}{1+n^2x^4}\right| = \frac{nx^2}{1+n^2x^4} \leq \frac{nx^2}{n^2x^4} = \frac{1}{nx^2} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Also ist $f_n \to 0$ punktweise für $n \to \infty$.

Sei $\tilde{f}(y) = \frac{y}{1+y^2}$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Wir beobachten, dass $f_n(x) = \tilde{f}(nx^2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt. Definiere $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{nx^2}{1+n^2x^4} \geq \frac{nx_n^2}{1+n^2x_n^4} = \tilde{f}(1) = \frac{1}{2}.$$

Also $\|f_n\|_\infty \not\to 0$, die Konvergenz $f_n \to 0$ ist also nicht gleichmäßig.

(ii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$1 + x + x^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}.$$

Da die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(\sqrt[4]{e})^3}\right)^n$$

konvergent ist und wegen

$$|g_n(x)| = e^{-n(1+x+x^2)} \leq e^{-\frac{3n}{4}} = \left(\frac{1}{(\sqrt[4]{e})^3}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}$$

ist die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ gleichmäßig konvergent nach (b) im Abschnitt 9.8 des Skriptes (Kriterium für gleichmäßige Konvergenz).

(iii) Sei zunächst $0 < a < 1$. Dann gilt für alle $x \in [a, \infty)$

$$|h_n(x)| = \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{1+na} \leq \frac{1}{na} =: \alpha_n \to 0$$

für $n \to \infty$. Nach (a) im Abschnitt 9.8 des Skriptes (Kriterium für gleichmäßige Konvergenz) ist die Funktionenfolge h_n gleichmäßig konvergent gegen die Nullfunktion.

Sei nun $a = 0$. Für $x = 0$ gilt $h_n(x) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und deshalb $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 1$. Für $x \neq 0$ ist

$$h_n(x) = \frac{1}{1+nx} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Deshalb konvergiert $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen h, wobei

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist. Weil h nicht stetig bei 0 ist, kann die Konvergenz nach (d) im Abschnitt 9.8 des Skriptes (Kriterium für gleichmäßige Konvergenz) nicht gleichmäßig sein.

(iv) Sei zunächst $0 < a < 1$ und $x \in [a, 1]$ fest. Dann gilt

$$h_n(x) = \sqrt[n]{n^2 x} \to 1 \qquad (n \to \infty).$$

Also ist $h_n \to 1$ punktweise für $n \to \infty$.

Da für alle $x \in [a, 1]$

$$\begin{aligned} |h_n(x) - 1| &= \left|\sqrt[n]{n^2 x} - 1\right| = \left|\sqrt[n]{n^2 x} - \sqrt[n]{n^2 a} + \sqrt[n]{n^2 a} - 1\right| \\ &\leq \left|\sqrt[n]{n^2 x} - \sqrt[n]{n^2 a}\right| + \left|\sqrt[n]{n^2 a} - 1\right| \overset{x\geq a}{=} \sqrt[n]{n^2 x} - \sqrt[n]{n^2 a} + 1 - \sqrt[n]{n^2 a} - 1 \\ &\overset{x\leq 1}{\leq} \sqrt[n]{n^2} - \sqrt[n]{n^2 a} + 1 - \sqrt[n]{n^2 a} =: \alpha_n \to 0 \end{aligned}$$

für $n \to \infty$, ist die Funktionenfolge h_n gleichmäßig konvergent nach (a) im Abschnitt 9.8 des Skriptes (Kriterium für gleichmäßige Konvergenz).

Sei nun $a = 0$. Für $x = 0$ gilt $h_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und deshalb $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0$. Für $x \neq 0$ gilt, mit der gleichen Rechnung wie oben, $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 1$. Deshalb konvergiert $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen h, wobei

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $x \in [0, 1]$. Weil h nicht stetig bei 0 ist, kann die Konvergenz nach (d) im Abschnitt 9.8 der Vorlesung (Kriterium für gleichmäßige Konvergenz) nicht gleichmäßig sein.

$\square$

Aufgabe 46:

(i) Da f in allen $x \in D\setminus\{1\}$ stetig ist, reicht es $f(1) = y_0$ so zu wählen, dass $\lim_{x\to 1} f(x) = y_0$ gilt. Für alle $x \in D \setminus \{1\}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x^2-4)(x-1)} = \frac{1}{x-1} \cdot \left(1 + \frac{3}{(x^2-4)}\right) = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{(x^2-4)+3}{(x^2-4)} \\ &= \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{(x^2-4)} = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{(x^2-4)} = \frac{x+1}{(x^2-4)}. \end{aligned}$$

Folglich muss $y_0 := \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{(x^2-4)} = -\frac{2}{3}$ gewählt werden.

(ii) Sei $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$. Da f in allen $x \in D \setminus \{1\}$ stetig ist, reicht es $f(1) = y_0$ so zu wählen, dass $\lim_{x\to 1} f(x) = y_0$ gilt. Wir behandeln zunächst den Fall

$r \geq 0$ ($\Leftrightarrow p \in \mathbb{N}_0$). Sei $x \in D \setminus \{1\}$. Definiere $y := \sqrt[q]{x}$. Dann gilt mit der dritten binomischen Formel (siehe (1) im Abschnitt 4.11 des Skriptes)

$$f(x) = \frac{x^r - 1}{x - 1} = \frac{y^p - 1^p}{y^q - 1^q} = \frac{1^p - y^p}{1^q - y^q} = \frac{(y-1)\sum_{k=0}^{p-1} y^k}{(y-1)\sum_{k=0}^{q-1} y^k} = \frac{\sum_{k=0}^{p-1} y^k}{\sum_{k=0}^{q-1} y^k}.$$

Folglich muss

$$y_0 := \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sum_{k=0}^{p-1} \sqrt[q]{x}^k}{\sum_{k=0}^{q-1} \sqrt[q]{x}^k} = \frac{\sum_{k=0}^{p-1} 1}{\sum_{k=0}^{q-1} 1} = \frac{p}{q} = r$$

gewählt werden.

Ist $r < 0$ ($\Leftrightarrow \tilde{p} := -p \in \mathbb{N}$), so gilt

$$f(x) = \frac{x^r - 1}{x - 1} = \frac{\frac{1}{\sqrt[q]{x}^{\tilde{p}}} - 1}{\sqrt[q]{x}^q - 1} = \frac{\frac{1}{y^{\tilde{p}}} - 1}{y^q - 1^q} = \frac{1}{y^{\tilde{p}}} \cdot \frac{1 - y^{\tilde{p}}}{y^q - 1^q} = -\frac{1}{y^{\tilde{p}}} \cdot \frac{y^{\tilde{p}} - 1}{y^q - 1^q} \overset{\text{s.o.}}{=} -\frac{1}{y^{\tilde{p}}} \cdot \frac{\sum_{k=0}^{\tilde{p}-1} y^k}{\sum_{k=0}^{q-1} y^k}.$$

Folglich muss auch in diesem Fall

$$y_0 := \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} -\frac{1}{\sqrt[q]{x}^{\tilde{p}}} \cdot \frac{\sum_{k=0}^{\tilde{p}-1} \sqrt[q]{x}^k}{\sum_{k=0}^{q-1} \sqrt[q]{x}^k} = -\frac{\sum_{k=0}^{\tilde{p}-1} 1}{\sum_{k=0}^{q-1} 1} = \frac{p}{q} = r$$

gewählt werden.

(iii) Da f in allen $x \in D\setminus\{0\}$ stetig ist, reicht es $f(0) = y_0$ so zu wählen, dass $\lim_{x\to 0} f(x) = y_0$ gilt. Für alle $x \in D \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x\sin(x)}{\cos(x) - 1} = \frac{x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} - 1} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+2}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}} \\ &\overset{\text{Index-Shift}}{=} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+2}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+2}} = -\frac{x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}}{x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} x^{2n}} = -\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} x^{2n}}. \end{aligned}$$

Da $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} x^{2n}$ beide den Konvergenzradius $R = \infty$ haben, definieren sie nach Abschnitt 9.7 des Skriptes auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktionen $x \mapsto f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$ und $x \mapsto f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} x^{2n}$. Folglich muss

$$y_0 := \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-f_1(x)}{f_2(x)} = -\frac{f_1(0)}{f_2(0)} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

gewählt werden.

(iv) Da f in allen $x \in D\setminus\{0\}$ stetig ist, reicht es $f(0) = y_0$ so zu wählen, dass $\lim_{x\to 0} f(x) = y_0$ gilt. Für alle $x \in D \setminus \{0\}$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n}{x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}} \\ &\overset{\text{Index-Shift}}{=} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} x^{n+1}}{x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} x^n}{\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}} \end{aligned}$$

Da $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)!}x^n$, $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)!}x^n$ und $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$ alle den Konvergenzradius $R = \infty$ haben, definieren sie nach Abschnitt 9.7 des Skriptes auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktionen $x \mapsto f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}x^n$, $x \mapsto f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!}x^n$ und $x \mapsto f_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$. Folglich muss

$$y_0 := \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{f_3(x)} = \frac{f_1(0) + f_2(0)}{f_3(0)} = 2$$

gewählt werden.

□ Aufgabe 47:

Ist $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon := |f(x_0)| > 0$.

Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > N$ gilt $|f(x)| < \varepsilon$, denn:

Angenommen, dies wäre falsch. Dann existiert für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $x_N \in \mathbb{R}$ derart, dass $|x_N| > N$ ist, aber $|f(x_N)| \geq \varepsilon$. Es ist klar, dass die Folge $(x_N)_{N\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt ist. O.B.d.A. ist sie nicht nach oben beschränkt. Der Bemerkung im Abschnitt 6.10 des Skriptes nach, besitzt sie eine Teilfolge $(x_{N(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{N(k)} = \infty$. Wegen der Annahme gilt aber $\left|f(x_{N(k)})\right| \geq \epsilon > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Also $f(x_{N(k)}) \not\to 0$ für $k \to \infty$. Dies ist ein Widerspruch zu $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Also muss die Annahme verworfen werden.

Da die Funktion $x \mapsto |f(x)|$ stetig und $[-N, N]$ kompakt ist, existiert nach Satz im Abschnitt 9.15 der Vorlesung ein $x_M \in [-N, N]$ derart, dass $|f(x)| \leq |f(x_M)|$ für alle $x \in [-N, N]$ ausfällt. Für jedes $x \notin [-N, N]$ gilt aber nach Obigem

$$|f(x)| < |f(x_0)| \overset{x_0\in[-N,N]}{\leq} |f(x_M)|\,.$$

Insgesamt ist also tatsächlich $|f(x)| \leq |f(x_M)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. □

Aufgabe 48:

Betrachte $g(x) = f(x) - f(\frac{1}{2} + x)$ für alle $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ erklärt ist. Es gilt $g(0) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right) =: d$, $g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) = -d$. Also ist 0 zwischen $g(0)$ und $g\left(\frac{1}{2}\right)$. Nach dem Zwischenwertsatz aus Abschnitt 9.9 der Vorlesung, existiert ein $x_1 \in [0, \frac{1}{2}]$ mit $g(x_1) = 0 = f(x_1) - f(\frac{1}{2} + x_1) \Leftrightarrow f(x_1) = f(\frac{1}{2} + x_1)$. □

Aufgabe 49: Wir zeigen, dass für $\varepsilon > 0$ beliebig gilt $|f_n(x_n) - f(x)| < \varepsilon$ für $n > N_\varepsilon$. Wir ergänzen eine null unter dem Betrag und verwenden die Dreiecksungleichung

$$|f_n(x_n) - f(x_n) + f(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty + |f(x_n) - f(x)|$$

Die letzte Ungleichung gilt, da $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|$ das supremum über alle Punkte $x \in D$ gilt und daher größer ist, als wenn man das spezielle $x_n \in D$ einsetzt.
Da $f_n \to f$ geleichmäßig gilt $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon/2$ für $n > N_1(\varepsilon)$ und da f stetig und $x_n \to x$ gilt $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon/2$ für $n > N_2(\varepsilon)$. Sei also $N_\varepsilon = \max\{N_1, N_2\}$, dann folgt die Aussage sofort.

Aufgabe 50:

(a) Es gilt

$$e^{\mathrm{i}\varphi}-e^{\mathrm{i}\psi} = e^{\mathrm{i}\frac{\varphi+\psi}{2}}\cdot\left(e^{\mathrm{i}\varphi-\frac{\varphi+\psi}{2}} - e^{\mathrm{i}\psi-\frac{\varphi+\psi}{2}}\right) = e^{\mathrm{i}\frac{\varphi+\psi}{2}}\cdot\left(e^{\mathrm{i}\frac{\varphi-\psi}{2}} - e^{-\mathrm{i}\frac{\varphi-\psi}{2}}\right) = 2\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\frac{\varphi+\psi}{2}}\cdot\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right).$$

Deshalb ist tatsächlich $\left|e^{\mathrm{i}\varphi} - e^{\mathrm{i}\psi}\right| = \left|2e^{\mathrm{i}\frac{\varphi+\psi}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|$.

(b) Die n-ten Einheitswurzeln sind nach Abschnitt 10.6 der Vorlesung durch

$$w_n := w_0 := 1 = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}\cdot 0},\ w_1 := e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}\cdot 1},\ \ldots,\ w_{n-1} := e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}\cdot(n-1)}$$

gegeben. Nach Teilaufgabe (a) gilt

$$|w_{k+1} - w_k| = \left|e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}\cdot(k+1)} - e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}\cdot k}\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right|$$

für alle $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Also bilden w_k mit $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ ein reguläres n-Eck vom Umfang

$$L_n = |w_{n-1} - w_0| + \sum_{k=0}^{n-2} |w_{k+1} - w_k| = 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

(c) Nach Beispiel im Abschnitt 9.4 des Skriptes gilt

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 2\pi\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = \lim_{x\to 0} 2\pi\frac{\sin(x)}{x} = 2\pi.$$

(d) Das Ergebnis lässt sich wie folgt verstehen: Das von den w_k ($k \in \{0, \ldots, n_1\}$) aufgespannte reguläre n-Eck approximiert immer besser den Einheitskreis $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$. Der Umfang der Rechtecke approximiert den Umfang der $\mathbb{S}^1$. Eine Skizze für $n = 6$ ist in der Abbildung (1) zu finden.

□

Aufgabe 51:

(a) Sei (x_n) eine konvergente Folge in N mit $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$. Zu zeigen ist, dass $x_0 \in N$ (Definition im Abschnitt 9.14 der Vorlesung).

Da $N \subseteq D$ und D abgeschossen ist, gilt $x_0 \in D$. Weil f stetig ist, gilt

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(x_n)}_{\overset{x_n\in N}{=}0} = 0.$$

Also ist in der Tat $x_0 \in N$.

(b) Nach Teilaufgabe (a) ist N abgeschlossen. Ferner ist N nach Voraussetzung nicht leer und nach unten beschränkt. Nach Satz im Abschnitt 9.14 des Skriptes gilt $\inf N \in N$. Also hat N ein Minimum.

□

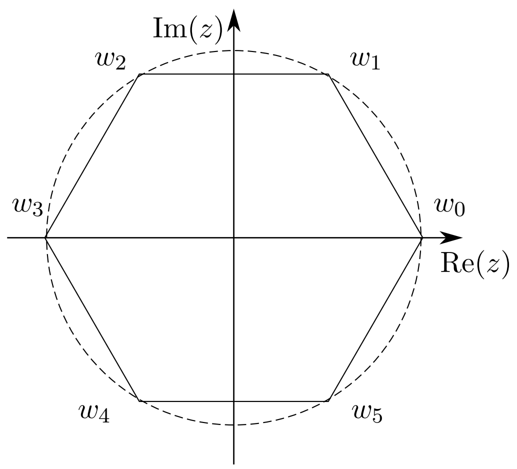

Abbildung 1: Sechste Einheitswurzeln